Lösningsskiss för TAIU05, 2020-06-08

1. En normalvektor till planet är $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, och vi bildar linjerna L_1 och L_2 som går genom P resp Q med $\overline{n}$ som riktingsvektor, så att $L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$, $L_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Genom att stoppa in koordinterna för respektive linje i planets ekvation finner vi att skärningspunkterna ges av $t = 1/3$ för L_1 och $t = -2/3$ för L_2. Avståndet från P till planet blir därför $||\frac{1}{3}\overline{n}|| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ och avståndet från Q till planet blir $|| - \frac{2}{3}\overline{n}|| = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. P är alltså närmast med avståndet $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Vi kan skriva ekvationssystemet $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Vi finner att $\det(A) = a^2 - 4a + 3 = (a-1)(a-3)$. Om $\det(A) \neq 0$, dvs $a \neq 1, 3$ har systemet entydig lösning. Om $a = 1$ får vi räkningarna $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array} \underset{\text{radoperationer}}{\overset{\text{naturliga}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, med parameterlösningen $x = 1 - t, y = 0, z = t, t \in \mathbf{R}$. $a = 3$ ger $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \end{array} \underset{\text{radoperationer}}{\overset{\text{naturliga}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$, vilket saknar lösning.

3. Sedvanliga räkningar ger $\overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_{\|\overline{u}} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vidare är $||\overline{u}|| = 3$, $||\overline{u}|| = \sqrt{2}$, $\overline{u} \times \overline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Slutligen är $\overline{u} \cdot \overline{v} = -3 = ||\overline{u}|| \cdot ||\overline{v}|| \cos\alpha = 3\sqrt{2}\cos\alpha$, där α är sökt vinkel. Alltså är $\cos\alpha = -1/\sqrt{2}$, och eftersom $0 \leq \alpha \leq \pi$ följer att $\alpha = 3\pi/4$.

4. Med $A\overline{x} = \overline{b}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ studerar vi normalekvationerna $A^tA\overline{x} = A^t\overline{b}$, dvs $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 \\ a-4 \end{pmatrix}$. Här kan vi lösa ut $\overline{x}$ och finna minsta kvadrat-lösningen $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a+2 \\ a-1 \end{pmatrix}$. Om vi skall ha en lösning i vanlig mening kräver de två första ekvationerna $\begin{cases} x - 2y &= 1 \\ 2x - y &= 2 \end{cases}$ att $x = 1, y = 0$. Den sista ekvationen $x + y = a$ blir då uppfylld om $a = 1$.

5. Avbildningsmatrisen A till F ges av $(F(\overline{e}_1)\, F(\overline{e}_2)\, F(\overline{e}_3))$, dvs A:s kolumner består i tur och ordning av $F(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Projektion av en vektor $\overline{u}$ på planet ges av
$$F(\overline{u}) = \overline{u} - \frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}, \text{ dvs } F(\overline{e}_i) = \frac{\overline{e}_i\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}, \quad i = 1, 2, 3,$$
där $\overline{n}$ är en normalvektor till planet. Som normalvektor kan vi välja $\overline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi finner att $F(\overline{e}_1) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_2) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$. vilket ger att $A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$. $\overline{n}$ är en egenvektor med egenvärde 0, och vi finner också att $A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. $\overline{f}_1, \overline{f}_2$ bildar verkligen en bas eftersom de inte är parallella, och basbytesmatrisen T, där alltså $\underline{f} = \underline{e}T$, blir $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Om $\overline{u}$ har koordinaterna X i basen $\underline{e}$ och koordinaterna Y i basen $\underline{f}$ så att $\overline{u} = \underline{e}X = \underline{f}Y$ vet vi alltså att $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, och vi vet också att koordinatsambandet är $Y = T^{-1}X$. Eftersom $T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ finner vi att $Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.
   Från teorin vet också att $A_{\underline{f}} = T^{-1}A_{\underline{e}}T$, vilket innebär att $A_{\underline{f}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 15 & 13 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.