Lösningsskiss för TAIU05, 2020-08-21

1. Låt Q vara punkten $(1,1,2)$ så att linjen L ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{OQ} + t\overline{v}, t \in \mathbf{R}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ är en riktningsvektor för linjen. $\overline{v}$ är alltså parallell med planet. En annan vektor parallell med planet ges av $\overline{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vilket gör att en normalvektor $\overline{n}$ för planet ges av $\overline{n} = \overline{u} \times \overline{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Planets ekvation ges därför av $5x + 4y + 3z = D$ för någon konstant D. D fås fram genom att stoppa in koordinaterna för valfri känd punkt i planet och vi finner att $D = 15$. Planets ekvation är alltså $5x + 4y + 3z = 15$. Avståndet från origo kan fås fram genom att undersöka för vilket värde på parametern t som linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\overline{n}, t \in \mathbf{R}$ skär planet. Insättning i planets ekvation ger $50t = 15$ så att $t = \frac{3}{10}$. Avståndet blir därför $||\frac{3}{10}\overline{n}|| = \frac{3}{10}||\overline{n}|| = \frac{3}{10}\sqrt{50} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.
2. Vi skriver ut vissa led i radoperationerna: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -8 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 14 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 8 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$. Här ser vi att $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ -12 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Vidare ger räknereglerna för determinanter att $\det(A^{-2}) = (\det(A^{-1}))^2 = \frac{1}{(\det(A))^2}$, och eftersom $\det(A) = 2$, följer att $\det(A^{-2}) = \frac{1}{4}$.
3. Vi kan skriva ekvationen $A\overline{x} = \overline{b}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Vidare beräknar vi $A^tA = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$, vilket innebär att normalekvationerna blir $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$. Lösningen till denna ekvation ger minsta kvadrat-lösningen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vidare säger teorin att den efterfrågade projektionen är $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Vi börjar med att skriva om ekvationen til $X(B - C^2) = -A^{-1}$. Om $B - C^2$ kan inverteras är alltså lösningen $X = -A^{-1}(B - C^2)^{-1}$. Vi finner i tur och ordning att $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B - C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. $B - C^2$ har inversen $(B - C^2)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Vi finner därmed att $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$.
5. Som normalvektor kan vi ta $\overline{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, och vi noterar att $\overline{n} \cdot \overline{n} = 14$. Spegling i planet innebär att $F(\overline{u}) = \overline{u} - 2\frac{\overline{u} \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}$. Vi kallar avbildningsmatrisen A och vet att den har $F(\overline{e}_1)$, $F(\overline{e}_2)$ samt $F(\overline{e}_3)$ som kolumner. Vi skall alltså räkna ut $F(\overline{e}_i) = \overline{e}_i - 2\frac{\overline{e}_i \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n},\ i = 1,2,3$. Vi finner att $F(\overline{e}_1) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_2) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, och därmed får vi att $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Vid en spegling avbildas alla vektorer i speglingplanet på sig själva. Dessa (förutom nollvektorn) är alltså egenvektorer med egenvärde 1. Vidare avbildas alla vektorer som är multiplar av $\overline{n}$ på minus sig själva. Dessa (förutom nollvektorn) är därför egenvektorer med egenvärde -1.
6. Med $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ kan vi skriva systemet $Y'(t) = AY(t)$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Vi söker en bas av egenvektorer till A. Egenvärdena är lösningarna till karaktäristiska ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 10\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 10) = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 5)$. Det innebär att egenvärdena är $\lambda = 0, \lambda = 2, \lambda = -5$, och till dessa bestämmer vi egenvektorer. Vi väljer till exempel $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (egenvärde 0), $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvärde 2) samt $\overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$ (egenvärde -5).

   $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$ (skilda egenvärden), och därmed vet vi att allmänna lösningen ges av $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + C_3\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}e^{-5t}$, där C_1, C_2 och C_3 är godtyckliga konstanter. De lösningar som är begränsade för $t \geq 0$ karaktäriseras av att $C_2 = 0$.
7. Vi börjar med att skriva $F(\overline{x}) = \overline{a} \times \overline{x} + \overline{x} \times \overline{b} = \overline{a} \times \overline{x} - \overline{b} \times \overline{x} = (\overline{a} - \overline{b}) \times \overline{x}$. Här uppstår två fall. 1) $\overline{a} = \overline{b}$, dvs $\overline{a} - \overline{b} = \overline{0}$. Det innebär att $F(\overline{x}) = \overline{0}$ för alla $\overline{x}$, och alla vektorer utom nollvektorn är därmed egenvektorer med egenvärde 0. 2) $\overline{a} \neq \overline{b}$, dvs $\overline{a} - \overline{b} \neq \overline{0}$. Eftersom $(\overline{a} - \overline{b}) \times \overline{x}$ är ortognal mot $\overline{x}$, samtidigt som kravet att vara en egenvektor kräver att $(\overline{a} - \overline{b}) \times \overline{x}$ är parallell med $\overline{x}$ blir enda möjligheten att $(\overline{a} - \overline{b}) \times \overline{x} = \overline{0}$. Detta inträffar som bekant då $\overline{x}$ är en multipel av $\overline{a} - \overline{b}$. Egenvektorerna blir alltså alla nollskilda multiplar av $\overline{a} - \overline{b}$, och egenvärdet är återigen 0.