

# Extra övningsuppgifter (dubbelintegraler)

Johan Thim (johan.thim@liu.se)

29 januari 2022

1. Låt  $D$  vara området som begränsas av linjerna  $x = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = x$  samt  $y = 2x$ . Beräkna

$$\iint_D (x + \cos y) \, dx dy.$$

2. Låt  $D$  vara området i första kvadranten där  $1 \leq x \leq e$  och  $0 \leq y \leq \ln x$ . Beräkna integralen

$$\iint_D x e^y \, dx dy.$$

3. Låt  $D$  vara triangeln med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  och  $(1, 1)$ . Beräkna integralen

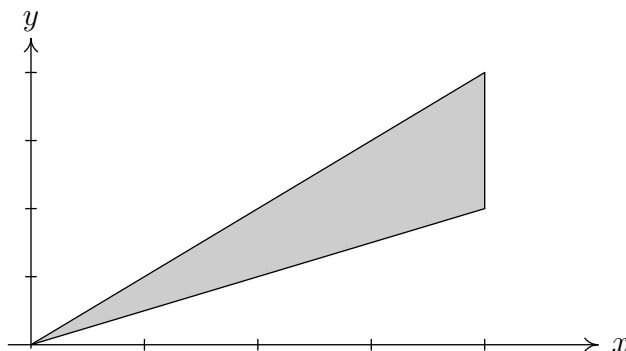
$$\iint_D e^{-x^2/2} \, dx dy.$$

4. Beräkna  $\iint_D \cos(x + y) \, dx dy$  om  $D$  är triangeln med hörn i  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  och  $(2, 0)$ .

5. Beräkna integralen  $\iint_D x \cos y \, dx dy$ , där  $D$  är området i  $\mathbf{R}^2$  som begränsas av  $x = 0$ ,  $y = 1$  och  $y = x^2$ . (3p)

## Svar

1. Vi skissar området i Figur 1.



Figur 1: Området i uppgift 1.

Vi itererar med  $x$ -integralen ytterst:

$$\begin{aligned}\iint_D (x + \cos y) \, dx dy &= \int_0^4 \int_x^{2x} (x + \cos y) \, dy dx = \int_0^4 x^2 + \sin 2x - \sin x \, dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{\cos 2x}{2} + \cos x \right]_0^4 = \frac{1}{2} \left( \frac{125}{3} - \cos 8 + 2 \cos 4 \right)\end{aligned}$$

2. Vi itererar dubbelintegralen och beräknar

$$\iint_D x e^y \, dx dy = \int_1^e \int_0^{\ln x} x e^y \, dy dx = \int_1^e x (e^{\ln x} - 1) \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^3 - 1}{3} - \frac{e^2 - 1}{2}.$$

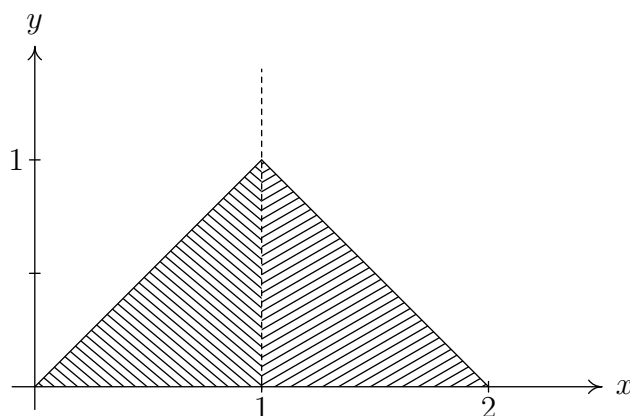
3. Vi ställer upp integralen enligt följande:

$$\iint_D e^{-x^2/2} \, dx dy = \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2/2} \, dy dx = \int_0^1 x e^{-x^2/2} \, dx = \left[ -e^{-x^2/2} \right]_0^1 = 1 - e^{-1/2}.$$

Observera att vi inte kan börja med  $x$ -integralen innerst!

**Svar:**  $1 - e^{-1/2}$ .

4. Området kan beskådas i figuren nedan.



Vi delar upp integralen i två delar kring linjen  $x = 1$ :

$$\begin{aligned}\iint_D \cos(x+y) \, dx dy &= \int_0^1 \int_0^x \cos(x+y) \, dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \cos(x+y) \, dy dx \\ &= \dots = \frac{1}{2}(-1 + \cos 2 + 2 \sin 2).\end{aligned}$$

**Svar:**  $\frac{1}{2}(-1 + \cos 2 + 2 \sin 2)$ .

5. Området ligger i första kvadranten mellan  $y$ -axeln, linjen  $y = 1$  och kurvan  $y = x^2$  (rita figur!). Alltså får vi

$$\int_0^1 \int_{x^2}^1 x \cos y \, dy dx = \int_0^1 (x \sin 1 - x \sin x^2) \, dx = \frac{1}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1).$$

**Svar:**  $(\cos 1 + \sin 1 - 1)/2$ .