Fö 10:

October 4, 2023

Trippelintegraler

Definitionen av trippelintegraler sker i analogi med enkel och dubbelintegraler.

Numerisk beräkning:
Antag att $f(x, y, z)$ är en integrerbar funktion på Ω d v s
trippelintegralen $\int\int\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz$ existerar.

Steg 1: Dela in Ω i små bitar $\Omega_1^{(1)}, \Omega_2^{(1)}, ..., \Omega_{n_1}^{(1)}$ s. a. diametern av $\Omega_i^{(1)} < 1$ för alla i.

(Med diametern av en delmängd A till R^3 menar vi diametern av den minsta sfären som kan omsluta A.)

I varje delområde $\Omega_i^{(1)}$ väljer vi en punkt $P_i^{(1)}$ och bildar summan

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n_1} f(P_i^{(1)}) \cdot (\text{volymen av } \Omega_i^{(1)}) \qquad \text{(Riemannsumma, sida 252)}$$

Steg 2: Dela in Ω i små bitar $\Omega_1^{(2)}, \Omega_2^{(2)}, ..., \Omega_{n_2}^{(2)}$ s. a. diametern av $\Omega_i^{(2)} < \frac{1}{2}$ för alla i.
I varje delområde $\Omega_i^{(2)}$ väljer vi en punkt $P_i^{(2)}$ och bildar summan

$$I_2 = \sum_{i=1}^{n_2} f(P_i^{(2)}) \cdot (\text{volymen av } \Omega_i^{(2)})$$

Fortsätt på samma sätt och bilda summor $I_n,\ n = 3, 4, ...$
Då får man att

$$\int\int\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \lim_{n\to\infty} I_n.$$

Fysikaliska tolkningar:

(i) $\int\int\int_\Omega 1dxdydz$ är volymen av kroppen Ω.

(ii) $\int\int\int_\Omega f(x, y, z)dxdydz$ kan tolkas till ex. som massan av kroppen Ω med densitet $f(x, y, z)$ om $f \geq 0$.

Itererad integration:

Sats 1 (sida 287): Om $f(x,y,z)$ är en funktion integrerbar på ett tre-dimensionellt område $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in D$ och $\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$, där $\alpha(x,y)$ och $\beta(x,y)$ är funktioner kontinuerliga på D, så är

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int_D (\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz)dxdy.$$

(Ytorna $z = \beta(x,y)$ och $z = \alpha(x,y)$ avgränsar området Ω uppifrån och nerifrån resp. Låt oss kalla dem vidare som *en överyta* och *underyta* m a p x,y-planet).

Sats 2: Om $f(x,y,z)$ är en funktion integrerbar på ett tre-dimensionellt område $\Omega = \{(x,y,z) : a \leq x \leq b,\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)$ och $\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$, där $\phi(x), \psi(x)$ är funktioner kontinuerliga på $[a,b]$ och $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ är funktioner kontinuerliga på $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, så är

$$\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} (\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz)dy)dx.$$

Ex 1. Finn volymen V av den kropp Ω som ligger mellan ytorna $z = x+1$ och $z = x^2 + y^2$ ovanför två-dimensionellt område $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$ i x,y-planet.

Lsg: Obs att $x + 1 \geq x^2 + y^2$ för alla $(x,y) \in D$. Så verkligen ligger ytan $z = x+1$ ovanför ytan $z = x^2 + y^2$. Använd sats 1.

$$V = \int\int\int_\Omega 1dxdydz = \int\int_D (\int_{x^2+y^2}^{x+1} 1dz)dxdy = \int\int_D ((x+1) - (x^2+y^2))dxdy =$$

$$\int_0^1 (\int_{x^2}^{x} (x + 1 - x^2 - y^2)dy)dx = \int_0^1 ((x+1-x^2)y - \frac{y^3}{3})|_{x^2}^{x} dx =$$

$$\int_0^1 ((x+1-x^2)x - \frac{x^3}{3}) - ((x+1-x^2)x^2 - \frac{x^6}{3})dx = \frac{201}{1260}.$$

Obs att man kunde även använda sats 2:

$$V = \int_0^1 (\int_{x^2}^{x} (\int_{x^2+y^2}^{x+1} f(x,y,z)dz)dy)dx.$$

Ex 2. Beräkna massan M av den kropp Ω som ligger inom klotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och ovanför konen $z = \sqrt{x^2+y^2}$ med densitet $f(x,y,z) = z + 1$.

Lsg. Först rita en bild. Obs att Ω är instängt mellan ytorna $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och $z = \sqrt{x^2+y^2}$ (den kompakta delen på bilden). Finn nu proektionen av skärningslinjen av ytorna $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ och $z = \sqrt{x^2+y^2}$ på x,y-planet:

Obs att skärningskurvan ges av systemet: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (1) och $z^2 = x^2 + y^2$ (2). Sätt in HL av (2) i (1). Vi får ekv $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ som beskriver proektionen i x, y-planet.

Sammanfatta: kroppen Ω ligger mellan ytorna $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (överytan) och $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (underytan) definierade på området D avgränsad av cirkeln $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.

Enligt sats 1 får vi att

$$M = \int\int\int_\Omega (z+1)dxdydz = \int\int_D (\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (z+1)dz)dxdy =$$

$$\int\int_D (\frac{z^2}{2} + z)|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy = \frac{1}{2}\int\int_D (1 - x^2 - y^2 - (x^2+y^2))dxdy +$$

$$\int\int_D (\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2})dxdy.$$

Beteckna första integralen i summan med I_1 och andra med I_2.

Beräkna

$$I_1 = \int\int_D (1 - 2(x^2+y^2))dxdy = \int\int_D 1dxdy - 2\int\int_D (x^2+y^2)dxdy.$$

Obs att första termen i summan är arean av D (som är en cirkelskiva med radie $\frac{1}{\sqrt{2}}$) d v s $\pi \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{\pi}{2}$.

För att beräkna andra termen använd polära koordinater:

$$I_1 = \frac{\pi}{2} - 2\int\int_{D_{r\phi}} r^2 \cdot rdrd\phi = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^{2\pi} (\int_0^{\frac{1}{\sqrt{(2)}}} r^3 dr)d\phi = \frac{\pi}{4}.$$

Beräkna nu m h a polära koordinater även

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\sqrt{1-r^2} - r)rdr)d\phi = \int_0^{2\pi} (\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r\sqrt{1-r^2} - r^2)dr)d\phi =$$

| Använd substitutionen $t = 1 - r^2$ för första termen, $dt = -2rdr$ o s v |

$$2\pi(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}r^3)|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\pi}{3} \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Sammanfatta: $M = \frac{1}{2}I_1 + I_2$.

Variabelbyte i trippelintegraler

Analogt med dubbelintegraler (se sida 286) finns det formeln:

$$\int\int\int_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{\Omega_{uvw}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot |\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}| \, dudvdw, \qquad (\#)$$

där $x = x(u,v,w), y = y(u,v,w), z = z(u,v,w)$ är substitutionen som avbildar området Ω_{uvw} på området Ω_{xyz} och $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}$ är dess funktionaldeterminant.

Obs BELOPPET i HL.

Extra uppgift A: Betrakta sfäriska koordinater (se Fö 9).

(i) Vilka mängder i xyz-rummet beskriver ekvationerna: $r = c$, $\phi = c$, $\psi = c$, där c är en konstant? Svar: en sfär med radie c och centrum i origo, ett halvplan, en kon.

(ii) Vilken mängd i xyz-rummet beskriver systemet: $r = c_1$ och $\psi = c_2$, där c_1, c_2 är konstanter? Svar: en cirkel.

Ex 3. Gör om föregående exemplet m h a sfäriska koordinater (variabelbytet).
Lsg Obs att $|\frac{d(x,y,z)}{d(r,\phi,\psi)}| = r^2 sin\psi$ och $\Omega_{r\phi,\psi} = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$.
$M = \int_0^{2\pi}(\int_0^1(\int_0^{\frac{\pi}{4}}(rcos\psi + 1) \cdot r^2 sin\psi d\psi)dr)d\phi =$ | Obs följande upprepade integraler vi kan skriva som produkter (Varför ?)|

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^1 r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\psi \cdot cos\psi d\psi + \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\psi d\psi =$$

$$2\pi \cdot (\frac{r^4}{4})|_0^1 \cdot (-\frac{cos(2\psi)}{4})|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\pi \cdot (\frac{r^3}{3})|_0^1 \cdot (-cos\psi)|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Andra tillämpningar

Låt K vara en kropp i rummet med densitet $\rho(x, y, z)$ och massan $m = \int\int\int_K \rho(x, y, z)dxdydz$.
Kroppens tyngdpunkt T_K definieras som den punkt kring vilken kroppen är i momentjämvikt m a p varje tänkt tyngdkraft, oavsett dess riktning.
Tyngdpunktens koordinater (x_T, y_T, z_T) hittar man via formler
$m \cdot x_T = \int\int\int_K x \cdot \rho(x, y, z)dxdydz$,
$m \cdot y_T = \int\int\int_K y \cdot \rho(x, y, z)dxdydz$,
$m \cdot z_T = \int\int\int_K z \cdot \rho(x, y, z)dxdydz$.

Obs
$0 = \int\int\int_K (x - x_T) \cdot \rho(x, y, z)dxdydz$ (vi är i balans m a p x-variabeln),
$0 = \int\int\int_K (y - y_T) \cdot \rho(x, y, z)dxdydz$, (vi är i balans m a p y-variabeln)
$0 = \int\int\int_K (z - z_T) \cdot \rho(x, y, z)dxdydz$. (vi är i balans m a p z-variabeln)
Se också kap. 8-10 i boken