Fö 1:

September 2, 2020

Några mängdbegrepp

- *Euklidiska rummet* $R^n = \{(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}$ s. a. $x_i \in R\}, n \geq 2$ (sida 5).

  Avståndet mellan två punkter $\overline{x}$ och $\overline{y}$ från R^n definieras av

$$|\overline{x} - \overline{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Delmängder till R^n.

- *Sfär, eller cirkel då $n = 2$, med radie $r > 0$ och med centrum i $\overline{a} \in R^n$* (sida 6) är $C(\overline{a}, r) = \{\overline{x} \in R^n$ s. a. $|\overline{x} - \overline{a}| = r\}$.
- *Öppet (resp. slutet) klot, ellere cirkelskiva då $n = 2$, med radie $r > 0$ och med centrum i $\overline{a} \in R^n$* (sida 10) är

  $B(\overline{a}, r) = \{\overline{x} \in R^n$ s. a. $|\overline{x} - \overline{a}| < r\}$ (resp. $\overline{B}(\overline{a}, r) = \{\overline{x} \in R^n$ s. a. $|\overline{x} - \overline{a}| \leq r\}$).

  Observera att $\overline{B}(\overline{a}, r) = B(\overline{a}, r) \cup C(\overline{a}, r)$.

Definition (sida 11): Låt $M \subseteq R^n$ (d v s M är en delmängd till R^n).

En punkt $\overline{a}$ i R^n säges vara

(1) *en inre punkt till* M om det finns ett klot B kring $\overline{a}$ som helt ligger i M,

det inre till $M = \{$ samtliga inre punkter till $M\}$, beteckning $IntM$;

(2) *en randpunkt till* M om varje klot B kring $\overline{a}$ innehåller punkter såväl från M som från CM ($= M$:s komplement)

randen till $M = \{$ samtliga randpunkter till $M\}$, beteckning BdM.

Definition (sida 13): En mängd M i R^n säges vara

(1) *sluten* om $BdM \subseteq M$;

(2) *öppen* om $BdM \cap M = \emptyset$;

(3) *begränsad* om det finns ett klot $B(\overline{0}, r)$ s. a. $M \subseteq B(\overline{0}, r)$, där $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$;

(4) *kompakt* om M är sluten och begränsad.

Observera att $BdM = BdCM$ och M är sluten om och endast om CM är öppen.

Ex 1. Betrakta mängderna $M_1 = B(\overline{0}, 1) = \{\overline{x} \in R^n \text{ s. a. } |\overline{x}| < 1\}$, $M_2 = BdM_1$, $M_3 = CM_1 = \{\overline{x} \in R^n \text{ s. a. } |\overline{x}| \geq 1\}$.

Observera att $BdM_1 = BdM_2 = BdM_3 = C(\overline{0}, 1)$. Dessutom

(1) M_1 är öppen, icke-sluten och begränsad (ty $M_1 \cap BdM_1 = \emptyset$ och $M_1 \subseteq B(\overline{0}, 1)$);

(2) M_2 är kompakt, icke-öppen;

(3) M_3 är sluten, icke-öppen och obegränsad.

• *Funktioner av flera variabler* (sida 15):

$f : D_f \subseteq R^m \to R^n$, bl. a. $g : D_g \subseteq R^2 \to R$. Definiera som i en-variabel analys.

• *Grafen av* $g = \{(x, y, z) \in R^3 \text{ s. a. } z = g(x, y),\ (x, y) \in D_g\}$.

Ett sätt att åskådliggöra en funktion g är att skissera dess graf (sida 16-17). Det kan man göra punktvis eller med hjälp av skärningskurvor av grafen med plan $x = a,\ y = b,\ z = c$, där a, b, c är konstanter.

Ex 2 Låt $g(x, y) = x^2 + y^2$. Använd gärna skärningskurvor av grafen med plan $z = c$, där $c > 0$ (som är i fallet cirklar $x^2 + y^2 = c$ i plan $z = c$) och skärningskurva av vår graf med planet $x = 0$ (som är i fallet parabeln $z = y^2$ i planet $x = 0$).

Ett annat sätt att åskådliggöra en funktion g av två variabler x, y är att rita dess *nivåkurvor* d v s kurvor av typen $g(x, y) = c$ i (x, y)-planet (sida 19).

Prova med funktionen $g(x, y) = x^2 + y^2$.

Gränsvärden och kontinuitet.

Analogt med en-variabel analys.

Definition (se även sida 34): Låt $f : D \subseteq R^n \to R^p$, $\overline{a} \in IntD$ och $\overline{A} \in R^p$.
Vi skriver att $f(\overline{x}) \to \overline{A}$ *då* $\overline{x} \to \overline{a}$ (*eller* $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = \overline{A}$)
om det till varje $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ s. a. följande implikation gäller

$$0 < |\overline{x} - \overline{a}| < \delta \ \Rightarrow |f(\overline{x}) - \overline{A}| < \varepsilon.$$

Definition (sida 40): Funktionen $f(\overline{x})$ säges vara *kontinuerlig i punkten* $\overline{a}$ om $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) = f(\overline{a})$.

• *Extra uppgift A:* Visa enligt definitionen att $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ och $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$.

Föld: Funktionerna $f(x, y) = x$ och $g(x, y) = y$ är kontinuerliga i vilken punkt som helst på planet R^2.

Några exempel till på kontinuerliga funktioner:
$f(x, y) = x^2 + y^3 - 2,\ g(x, y) = x \cdot sin(y^4 - 1) + 5,\ h(x, y) = e^{x+2y}$, etc.
De är kontinuerliga enligt följande

Sats (sidor 35-36): Vanliga räkneregler från en-variabel analys angående gränsvärden och kontinuerliga funktioner (som summa, produkt, kvot av funktioner, etc) gäller även i flervariabel analys, bl. a. gäller följande påståenden.

1) Låt $f, g : R^n \to R$ vara funktioner och $\overline{a} \in R^n$. Om f är *begränsad nära* $\overline{a}$ (d v s det finns en konstant k och ett klot $B(\overline{a}, r)$ s. a. $|f(\overline{x})| \leq k$ för alla $\overline{x} \in B(\overline{a}, r) \setminus \{\overline{a}\}$) och $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(\overline{x}) = 0$ så är $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} f(\overline{x}) \cdot g(\overline{x}) = 0$.

2) Låt $f : R^n \to R^m$, $g : R^m \to R^k$ vara funktioner och $\overline{a} \in R^n, \overline{b} \in R^m, \overline{c} \in R^k$. Om $f(\overline{x}) \to \overline{b}$ då $\overline{x} \to \overline{a}$ och $g(\overline{y}) \to \overline{c}$ då $\overline{y} \to \overline{b}$ så är $g(f(\overline{x})) \to \overline{c}$ då $\overline{x} \to \overline{a}$
(*sammansättningsregeln* som kan användas med variabelbytet $\overline{y} = f(\overline{x})$ under lim vid övergången $\lim_{\overline{x}\to\overline{a}} g(f(\overline{x})) = \lim_{\overline{y}\to\overline{b}} g(\overline{y})$).

Fösta steget i en gränsvärdeundersökning är en insättning.
Ex 3. $G = \lim_{(x,y)\to(1,2)}(xy - x - y + 3) = |$ stoppa in $x = 1, y = 2$ i utrycket $| = 1 \cdot 2 - 1 - 2 + 3 = 2$. Det här är svaret.

Ex 4. $G = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2} = |$ Observera att insättningen $x = 1,\ y = -1$ ger $\frac{0}{0}$, en oklar situation ! $|$ = Vad gör man nu?
Lägg märke till att $(1, -1) \neq (0, 0)$ och $x - 1 \to 0,\ y + 1 \to 0$ då $(x, y) \to (1, -1)$.
Fortsätt med variabelbytet $x - 1 = u,\ y + 1 = v$ (detta underlättar undersökningen). Observera att $(u, v) \to (0, 0)$ då $(x, y) \to (1, -1)$. Så enligt sammansättningsregeln får man att $G = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2v}{u^2+v^2}$ (för att se detta sätt $f(x, y) = (x-1, y+1)$, $g(u, v) = \frac{u^2v}{u^2+v^2}$ och notera att $g(f(x, y)) = \frac{(x-1)^2(y+1)}{(x-1)^2+(y+1)^2}$).
Nu faktorisera: $\frac{u^2v}{u^2+v^2} = (\frac{u^2}{u^2+v^2}) \cdot v$ och observera att $0 \leq \frac{u^2}{u^2+v^2} \leq 1$ (begränsad!) bl. a. nära $(0, 0)$ och $v \to 0$ då $(u, v) \to (0, 0)$. Enligt satsen medför det sista att $G = 0$.
Eller använd variabelbytet $u = rcos\phi,\ v = rsin\phi$. Observera att $(u, v) \to (0, 0) \Leftrightarrow r \to 0$ och $|\frac{u^2v}{u^2+v^2}| = r|\sin\phi\cos^2\phi| \leq r$. Så är $|\frac{u^2v}{u^2+v^2}| \to 0$ då $r \to 0$. Vi får igen $G = 0$.

Hur visar man att gränsvärde inte finns?
Ex 5. $G = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2v}{u^3+v^3}$ (anta att gränsvärdet existerar och är lika med G).
Låt $g(u, v) = \frac{u^2v}{u^3+v^3}$. Använd nu sammansättningsregeln på följande sätt.
Först, betrakta funktionen $f(x) = (x, 0)$. Observera att $f(x) \to (0, 0)$ då $x \to 0$ och $G = \lim_{(u,v)\to(0,0)} g(u, v)$. Då (enligt satsen) är $G = \lim_{x\to0} g(f(x)) = \lim_{x\to0} g(x, 0) =$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot 0}{x^3+0^3} = 0$.

Andra, betrakta funktionen $f(x) = (x, x)$. Observera att $f(x) \to (0,0)$ då $x \to 0$ och $G = \lim_{(u,v)\to(0,0)} g(u,v)$. Då (enligt satsen) är $G = \lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 x}{x^3+x^3} = \frac{1}{2}$.

Men $0 \neq \frac{1}{2}$ och båda är lika med G. Omöjligt! Detta medför att gränsvärdet finns ej.

(Läs mer om gränsvärden på sidor 37-39.)

Partiella derivator

Låt $f : D \subseteq R^2 \to R,\ (a,b) \in IntD$. Lägg märke till två en-variabel funktioner $f(x,b)$ och $f(a,y)$.

Definitionen (sida 46). Sätt

$f'_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\ \ (= f(x,b))'_x|_{x=a})$;

$f'_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\ \ (= f(a,y))'_y|_{y=b})$.

Dessa kallas *partiella derivator av* f m a p x resp. y.

- *Beteckningar*: $f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ och $f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ (sida 47).
- *Högre derivator*: $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x)'_x = f''_{xx}$,
  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_y)'_x = f''_{yx}, f^{(3)}_{xxy}, f^{(4)}_{xyxy}$ o s v.

Observera *ordningen !* (läs mer på sida 85).

Ex 6. Låt $f(x,y) = e^{2x+y^2}$. Då är $f'_x = |$ betrakta y som en konstant och derivera m a p x på vanligt sätt $| = e^{2x+y^2} \cdot (2x+y^2)'_x = e^{2x+y^2} \cdot 2$.

Analogt, $f''_{xy} = (f'_x)'_y = (2e^{2x+y^2})'_y = 2e^{2x+y^2} \cdot (2x+y^2)'_y = 4ye^{2x+y^2}$.

- *Extra uppgift B:* Visa att funktionen $u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{t}}}{2\sqrt{\pi t}}$ uppfyller ekv $u'_t = \frac{1}{4} \cdot u''_{xx}$.

Ex 7. Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ s. a. $f'_x = 2x + y$ (1) och $f'_y = x + 2y$ (2).

Lsg. Frys y och integrera (1) på x som man gör i en-variabel analys. Då får vi att $f(x,y) = \int f'_x dx = \int (2x+y)dx = x^2 + yx + c(y)$ (3). Observera att "konstanten" c beror på y !

Frys nu x och derivera (3) på y. Då får man att $f'_y = (x^2 + yx + c(y))'_y = x + c'(y)$. Repetera att också $f'_y = x + 2y$ (se (2)). Så är $c'(y) = 2y$ (4). Lös ut $c(y)$ ur (4) genom att integrera (4) på y. Då får vi att $c(y) = \int 2ydy = y^2 + d$, där d är en riktig konstant. Så är $f(x,y) = x^2 + yx + y^2 + d$, där d är en godtycklig konstant.