# Fö 2:

July 22, 2020

**Differentierbarhet**

En observation.

• I en-variabel analys om $f(x)$ *är deriverbar i en punkt så är* $f(x)$ *kontinuerlig i punkten.*

• I flervariabel analys *existensen av alla partiella derivator av ordning en i en punkt hos en funktion* $f$ *medför ej att* $f$ *är kontinuerlig i punkten.*

**Ex 1.** Betrakta funktionen $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$ om $(x,y) \neq (0,0)$, och 0 annars. Kontrollera att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ men $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existerar ej (*Extra uppgift*), bl. a. $f$ är diskontinuerlig i $(0,0)$ (se ex. 6, sida 51).

Vi inför ett nytt begrepp relaterat till derivering. (Dimension 2 för enkelhet.)

• Låt $f : D \subseteq R^2 \to R$ vara en funktion och $(a,b)$ en inre punkt till $D$.

**Definition** (se också sida 53): Funktionen $f$ kallas *differentierbar* i punkten $(a,b)$ om

$\alpha(h,k) = \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-f'_x(a,b)\cdot h - f'_y(a,b)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \quad$ då $(h,k) \to (0,0)$.

**Ex 2**. Visa att funktionen $f(x,y) = xy$ är differentierbar i punkten $(1,1)$ enligt definitionen.

Bevis. Först, beräkna: $f(1,1) = 1$, $f'_x(1,1) = y|_{(1,1)} = 1$ och $f'_y(1,1) = x|_{(1,1)} = 1$.

Sedan, undersök gränsvärdet:

Uttryck $U = \frac{f(1+h,1+k)-f(1,1)-f'_x(1,1)\cdot h - f'_y(1,1)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(1+h)(1+k)-1-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ och

faktorisera $U = \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot k$.

Lägg märke till att första faktorn är begränsad nära $(0,0)$ (ty $\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{\sqrt{h^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$) och andra faktorn (som är $k$) går mot 0 då $(h,k) \to (0,0)$.

Då gäller att $U \to 0$ då $(h,k) \to (0,0)$. Så är $f$ differentierbar i $(1,1)$.

**Sats**: (a) Om funktionen $f$ är differentierbar i punkten $(a, b)$ så är $f$

(i) partiellt deriverbar i $(a, b)$ m a p $x$ och $y$; och

(ii) kontinuerlig i $(a, b)$ (sida 53);

(b) Om $f'_x$ och $f'_y$ existerar i en öppen mängd $D$ i $R^2$, $(a, b) \in D$ och $f'_x$ och $f'_y$ är kontinuerliga i $(a, b)$ så är $f$ differentierbar i punkten $(a, b)$.

(Bl. a. om $f'_x$ och $f'_y$ är kontinuerliga på hela mängden $D$ (man säger att $f \in C^1(D)$ i fallet) så är $f$ differentierbar i varje punkt $P$ från $D$ (sida 57)).

Någon motivering. Observera att
$f(a+h, b+k) = f(a, b)+f'_x(a, b)h+f'_y(a, b)k+\alpha(h, k)\cdot\sqrt{h^2 + k^2} \to f(a, b)$ då $(h, k) \to (0, 0)$.

**Ex 3.** Funktionen $g(x, y) = xy$ är differentierbar i vilken punkt som helst på planet $R^2$ (ty partiella derivatorna $g'_x(x, y) = y$ och $g'_y(x, y) = x$ är kontinuerliga funktioner på hela $R^2$, se Fö 1).

• Utrycket $f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k = df(a, b)(h, k)$ kallas *en differential* av funktionen $f(x, y)$ i punkten $(a, b)$. (V.L. kan tolkas som en linjär funktion i två variabler $h, k$ (sida 113)). Differentialen kan användas vid felanalys (se sida 48).

En kort beteckning: $df = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$.

**Ex 4**. Finn differentialen av $f(x, y) = xy$ allmänt och i punkten $(1, 1)$.

Lsg. Allmänt, $df = y \cdot dx + x \cdot dy$ och i punkten

$df(1, 1)(h, k) = f'_x(1, 1) \cdot h + f'_y(1, 1) \cdot k = 1 \cdot h + 1 \cdot k = h + k$.

## Felanalys

Observera att om $f(x, y)$ är differentierbar i punkten $(a, b)$ så är

(*) $f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k$ eller

(**) $f(a + h, b + k) - f(a, b) \approx f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k = df(a, b)(h, k)$

nära punken $(a, b)$ (ty $\alpha(h, k) \cdot \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$ då $(h, k) \to (0, 0)$ snabbare än summan $f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b)$ gör).

• HL i (*) approximerar funktionensvärde i punkten $(a + h, b + k)$.

• HL i (**) approximerar skillnaden mellan $f(a + h, b + k)$ och $f(a, b)$.

**Ex. på felanalys**. Anta att vi bara vet att $|h| \leq r, |k| \leq s$ och vi skulle vilja lokalisera värdet $f(a + h, b + k)$. Betrakta belopp av både leden i (**) och uttryck vidare så här:

$|f(a+h,b+k)-f(a,b)| \approx |f'_x(a,b)\cdot h + f'_y(a,b)\cdot k| \leq |f'_x(a,b)|\cdot|h| + |f'_y(a,b)|\cdot|k| \leq$ $|f'_x(a,b)|\cdot r + |f'_y(a,b)|\cdot s = F$. Observera att $f(a+h,b+k)$ approximativt ligger någonstans på intervallet $[f(a,b)-F, f(a,b)+F]$. Vi tolkar $F$ som *ett fel* vilket kan uppstå vid ersättning av det okända $f(a+h,b+k)$ med $f(a,b)$.

## Kedjeregel

**Sats** (sida 64): Låt funktionen $f(u,v): D \subseteq R^2 \to R$ vara differentierbar på en öppen mängd $D$, funktionerna $g_1(t),\ g_2(t): (a,b) \subseteq R \to R$ deriverbara på ett öppet intervall $(a,b)$ och $(g_1(t), g_2(t)) \in D$ för alla $t \in (a,b)$.

Då är den sammansatta funktionen $h(t) = f(g_1(t), g_2(t)) : (a,b) \subseteq R \to R$ deriverbar och

$$\frac{dh}{dt} = (f(g_1(t), g_2(t)))'_t = \frac{\partial f}{\partial u}(g_1(t), g_2(t))\cdot g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial v}(g_1(t), g_2(t))\cdot g_2'(t) \quad \text{för alla } t \in (a,b)$$

eller (kortare) $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$ (jämför gärna med differentialen av $f(u,v)$).

**Ex 5.** (En motivering av satsen) Låt $f(u,v) = uv$, $g_1(t) = cos(t)$, $g_2(t) = t^2 + t$. Betrakta $h(t) = f(g_1(t), g_2(t))$. Finn $h'(t)$.

Lsg. *Första sättet:* Enligt satsen är $h'(t) =$
$\frac{\partial f}{\partial u}(cos(t), t^2+t)\cdot(cos(t))' + \frac{\partial f}{\partial v}(cos(t), t^2+t)\cdot(t^2+t)' = |\frac{\partial f}{\partial u} = v, \frac{\partial f}{\partial v} = u| =$
$(t^2+t)\cdot(-sin(t)) + cos(t)\cdot(2t+1)$.

*Andra sättet:* Obs $h(t) = (t^2+t)\cdot cos(t)$. Då är $h'(t) = |$ produkt regeln $| = (t^2+t)\cdot(-sin(t)) + cos(t)\cdot(2t+1)$. Jämför!

**Ex 6.** Betrakta funktionen $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$ om $(x,y) \neq (0,0)$, och 0 annars. Låt $g_1(t) = t$ och $g_2(t) = t, t \in R$. Observera att den sammansatta funktionen $h(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ är $h(t) = \frac{1}{2}$ om $t \neq 0$ och 0 annars. Är $h(t)$ deriverbar? Motivera svaret. Jämför med satsen.

## Den allmänna kedjeregeln

**Sats** (sida 69): Låt $f(u,v), u(x,y), v(x,y) : D_{(.)} \subseteq R^2 \to R$ vara differentierbara funktioner. Då är

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(u(x,y), v(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\cdot\frac{\partial(u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\cdot\frac{\partial(v(x,y)}{\partial x}$$

eller (kortare) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$.

Analogt med den partiella derivatan m a p $y$.

**Ex.** Bestäm alla $C^1$-funktioner som uppfyller ekv $2\frac{x}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 1,\ x, y > 0,$ genom att införa nya variabler $u, v:\ x = u^2 \cdot v,\ y = \frac{1}{u}$.

Lsg. Repetera att

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1) \quad \text{och} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2).$$

Uttryck först variablerna $u, v$ i $x, y$: $u = \frac{1}{y},\ v = xy^2$,
finn $\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y^2},\ \frac{\partial v}{\partial x} = y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2xy$ och stoppa de sista i (1), (2).

$$\Rightarrow f'_x = f'_u \cdot 0 + f'_v \cdot y^2 \quad \text{och} \quad f'_y = f'_u \cdot (-\tfrac{1}{y^2}) + f'_v \cdot 2xy.$$

Sätt in funna uttryck i ursprungliga ekv:

$$2\frac{x}{y} \cdot f'_v \cdot y^2 - (f'_u \cdot (-\tfrac{1}{y^2}) + f'_v \cdot 2xy) = 1 \text{ eller } 2xy \cdot f'_v + f'_u \cdot \tfrac{1}{y^2} - f'_v \cdot 2xy = 1 \text{ eller } u^2 \cdot f'_u = 1.$$

Obs $y > 0 \Rightarrow u > 0$. Vi får ekv $f'_u = \frac{1}{u^2}$ $(*)$. Lös denna:
Fix $v$ och integrera m a p $u$: $f(u, v) = \int \frac{\partial f}{\partial u} du = \int \frac{1}{u^2} du = -u^{-1} + c(v)$ (ty ”konstanten” måste bero på $v$).
Åter till $x, y$. Då får vi att $f(x, y) = -y + c(xy^2)$, där $c(v)$ är en godtycklig en-variabel $C^1$-funktion.

Till exempel, funktionerna $f(x, y) = -y + \sin(xy^2)$ eller $g(x, y) = -y + e^{xy^2}$ satisfierar ekvationen.