Fö 3:

September 9, 2022

Kurva, tangentvektor och tangent till kurvan

• *En kurva i planet* är en avbildning $\overline{r}(t) = (x(t), y(t)) : (a, b) \subseteq R_t \to R^2_{xy}$ med deriverbara funktioner $x(t), y(t)$ (sida 23), åskådligöras med dess värdemängd.

• Betrakta en punkt $P_0 = \overline{r}(t_0), t_0 \in (a, b)$, på kurvan. Anta att minst en av konstanterna $x'(t_0), y'(t_0)$ är skilld från 0. Då kallas vektorn $(x'(t_0), y'(t_0))$ *en tangentvektor* till kurvan i punkten P_0 och betecknas med $\frac{d\overline{r}}{dt}(t_0)$ eller $\overline{r}'(t_0)$.

(En motivering. Låt $P = \overline{r}(t)$ (en rörlig punkt på kurvan). Riktade sträckan $\overline{P_0P}$ har koordinater $(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0))$. För varje $t \neq t_0$ är vektorn $\frac{1}{t-t_0} \cdot \overline{P_0P}$ parallell med $\overline{P_0P}$ och har koordinater $(\frac{1}{t-t_0}(x(t) - x(t_0)), \frac{1}{t-t_0}(y(t) - y(t_0)))$.

Lägg märke till att

$\frac{1}{t-t_0} \cdot (x(t) - x(t_0)) \to x'(t_0)$, $\frac{1}{t-t_0} \cdot (y(t) - y(t_0)) \to y'(t_0)$ och $P \to P_0$ då $t \to t_0$.)

Linjen $x = x(t_0) + x'(t_0) \cdot t, y = y(t_0) + y'(t_0) \cdot t, t \in R$, är *en tangentlinje eller en tangent* till kurvan i punkten P_0. Analogt i rummet.

Ex 1. Betrakta avbildningen $\overline{r}(t) = (t, t^2) : R_t \to R^2_{xy}$. Obs att parabeln $y = x^2$ är värdemängden till kurvan som ligger i planet. Finn tangentvektorn till kurvan $\overline{r}(t)$ i punkten $P(1, 1)$. Notera att $P(1, 1) = \overline{r}(1)$ och $\frac{d\overline{r}}{dt}(1) = (1, 2t)|_{t=1} = (1, 2)$.

Tvådimensionell yta och tangentplan till ytan

• *En två-dimensionell yta i rummet* är en avbildning $\overline{r}(t, s) = (x(t, s), y(t, s), z(t, s)) : D \subseteq R^2_{t,s} \to R^3_{xyz}$, där D är en öppen delmängd till $R^2_{t,s}$ och $x(t, s), y(t, s), z(t, s)$ är differentierbara funtioner, åskådligöras med dess värdemängd.

• Betrakta en punkt $P = \overline{r}(t_0, s_0)$ på ytan och avbildningarna $\overline{r}_1(t) = \overline{r}(t, s_0) : (a, b) \subseteq R_t \to R^3_{xyz}$ och $\overline{r}_2(s) = \overline{r}(t_0, s) : (c, d) \subseteq R_s \to R^3_{xyz}$ s. a. $(t, s_0) \in D$ för alla $t \in (a, b)$ och

$(t_0, s) \in D$ för alla $s \in (c, d)$. Lägg märke till att $\overline{r}_1(t_0) = \overline{r}_2(s_0) = P$ och kurvorna ligger på ytan i rummet.

Låt $\overline{a} = \frac{d\overline{r}_1}{dt}(t_0)$, $\overline{b} = \frac{d\overline{r}_2}{dt}(s_0)$ och $\overline{a} \times \overline{b} \neq \overline{0}$. Då definierar tangentvektorerna $\frac{d\overline{r}_1}{dt}(t_0)$, $\frac{d\overline{r}_2}{dt}(s_0)$ och punkten P ett plan i rummet som går genom P och som har en normalvektor $\overline{n} = \overline{a} \times \overline{b}$. Planet kallas *ett tangentplan* till ytan i punkten P. Om $\overline{n} = (A, B, C)$ och P har koordinater (x_0, y_0, z_0) så är $A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$ planets ekvation.

Ex 2. Betrakta en differentierbar funktion $f : D \subseteq R^2 \to R$. Observera att grafen $G_f = \{(x, y, z) \in R^3 \text{ s. a. } z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ av f är värdemängden till funktionen $\overline{r}(x, y) = (x, y, f(x, y)) : D \subseteq R^2_{x,y} \to R^3_{xyz}$ d v s en yta i rummet. Låt $P(a, b, c) \in G_f$. Observera att $c = f(a, b)$. Finn tangentplanets ekvation till ytan (grafen $z = f(x, y)$) i punkten P.

Notera att $\overline{r}_1(x) = (x, b, f(x, b))$ och $\overline{r}_2(y) = (a, y, f(a, y))$ är två kurvor på ytan. Vidare, $\overline{r}_1'(a) = (1, 0, f_x'(a, b))$, $\overline{r}_2'(b) = (0, 1, f_y'(a, b))$ och $\overline{n} = \overline{r}_1'(a) \times \overline{r}_2'(b) = (-f_x'(a, b), -f_y'(a, b), 1) \neq \overline{0}$.

Då är tangentplanets ekv till ytan i punkten P:
$(-f_x'(a, b)) \cdot (x - a) + (-f_y'(a, b)) \cdot (y - b) + 1 \cdot (z - c) = 0$ eller
$z = f(a, b) + f_x'(a, b)(x - a) + f_y'(a, b)(y - b)$ (se även sida 54).

Ex 3. Bestäm tangentplanets ekv till $z = f(x, y)$, där $f(x, y) = xy$ i punkten $P(1, 1, 1)$.

Lsg. Obs $f(1, 1) = 1$. Så ligger P verkligen på ytan. Utöver detta är $f_x'(1, 1) = 1$ och $f_y'(1, 1) = 1$. Tangenplanets ekv är då $z = 1 + 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 1)$ eller
$x + y - z - 1 = 0$.

Gradient och riktningsderivata

• Låt $f : D \subseteq R^2 \to R$ vara en differentierbar avbildning, definierad på en öpen delmängd D till R^2, och P en punkt i D.

Vektorn $(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P))$ kallas *en gradient* för f i punkten P (sida 77).

Beteckning: $gradf(P)$ eller $\nabla f(P)$.

Sats (sida 81): Låt $f(x, y) \in C^1(D)$, $\nabla f(P) \neq \overline{0}$ och $f(P) = c$. Då är nivåkurvan $f(x, y) = c$ nära P värdemängden för en kurva $\overline{r}(t) : (a, b) \subseteq R_t \to R^2_{x,y}$ s. a. $\overline{r}(t_0) = P$, där $t_0 \in (a, b)$, och $\nabla f(P) \perp$ tangenten till kurvan i punkten P (d v s $\nabla f(P) \perp \overline{r}'(t_0)$).

(Man säger att vektorn $\nabla f(P)$ är vinkelrät till nivåkurvan $f(x, y) = c$.)

Analogt i rummet men istället för nivåkurvor (tangenter) har vi nivåytor (tangentplan).

Ex 4. (En illustration) Betrakta funktioner $g(x) : R \to R$ (deriverbar) och $f(x,y) = y - g(x) : R^2 \to R$. Låt $P = (x_0, y_0) \in R^2$ och $f(P) = 0$. Notera att $\nabla f(P) = (-g'(x_0), 1) \neq \overline{0}$ och punkten P hör till nivåkurvan $f(x,y) = 0$ som är grafen $G_g = \{(x,y) : y = g(x)\}$. Lägg märke till att G_g kan också tolkas som värdemängden till avbildningen $\overline{r}(x) = (x, g(x)) : R \to R^2$ (en kurva i planet). Dessutom, $\overline{r}'(x_0) = (1, g'(x_0))$ och $\nabla f(P) \cdot \overline{r}'(x_0) = 0$. Så är $\nabla f(P) \perp \overline{r}'(x_0)$.

Ex 5. (En tillämpning) Finn tangentplanet till sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ i punkten $P(1,1,1)$.

Lsg. Sfären tolkar vi som en nivåyta till funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Observera att $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ och $\nabla f(P) = (2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 1) = (2,2,2) \neq \overline{0}$. Enligt satsen är $\nabla f(P)$ en normalvektor till sfären (tangentplanet) i punkten P. Nu får man skriva tangentplanets ekv:

$2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$ eller $x + y + z = 3$.

- Betrakta en nollskilld vektor $\overline{v} = (v_1, v_2)$ och en punkt $P(a,b)$.

  Riktningsderivata $f'_{\overline{v}}(a,b)$ *av* f *i riktningen* $\overline{v}$ *i punkten* P är

  $f(a + t \cdot \frac{v_1}{|\overline{v}|}, b + t \cdot \frac{v_2}{|\overline{v}|})'_t|_{t=0}$.

  Observera att $f'_{\overline{v}}(a,b) = |$ kedjeregen $| = f'_x(P) \cdot \frac{v_1}{|\overline{v}|} + f'_y(P) \cdot \frac{v_2}{|\overline{v}|} = \nabla f(P) \cdot \frac{1}{|\overline{v}|}\overline{v}$ (sida 77).

- Lägg märke till att

  1) $f'_{\overline{v}}(a,b)$ beskriver hur snabbt f växer eller avtar i riktningen $\overline{v}$ i punkten P;

  2) $f'_{\overline{v}}(a,b) = |\nabla f(a,b)| \cdot cos(\gamma)$, där γ är vinkeln mellan vektorerna $\nabla f(a,b)$ och $\overline{v}$ (så antas största värde av $f'_{\overline{v}}(a,b)$ m a p γ då $\gamma = 0$ och minsta värde då $\gamma = \pi$).

  Sammanfatta:

  Sats (sida 79): Gradienten $\nabla f(P)$ pekar i den riktning i vilken funktionen f växer snabbast i P, och mätetalet på den maximala tillväxthastigheten är $|\nabla f(P)|$.

  Analogt i rummet.

Taylors formel

- *En variabel analys*:

Om F är en C^3-funktion (d v s $F^{(3)}$ är kontinuerlig) på $(c,d) \subset R$ och $a \in (c,d)$ så är

$F(a+t) = F(a) + F'(a) \cdot t + \frac{1}{2}F''(a) \cdot t^2 + \frac{1}{3!}F'''(a + \theta(t) \cdot t) \cdot t^3$, där $\theta(t) \in (0,1)$, för varje t med $a + t \in (c,d)$.

Uttrycket $P_1(t) = F(a) + F'(a) \cdot t$ är *Taylorpolinom av grad 1.*

Uttrycket $P_2(t) = F(a) + F'(a) \cdot t + \frac{1}{2}F''(a) \cdot t^2$ är *Taylorpolinom av grad 2,*

Termen $\frac{1}{3!}F'''(a + \theta(t) \cdot t) \cdot t^3$ är *restterm.*

Om $a = 0$ så får man

$F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \frac{1}{2}F''(0) \cdot t^2 + \frac{1}{3!}F'''(\theta(t) \cdot t) \cdot t^3$ (*Maclaurins formel av grad 2*).

• *Flervariabel analys*:

Sats (sida 94): Om f är en C^3-funktion (se för definition sida 86) i en öppen mängd $D \subset R^2$ och $(a, b) \in D$ så är

$f(a + h, b + k) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \frac{1}{2}(f''_{xx}(a, b))h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}(a, b)k^2) + (h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}} \cdot B(h, k)$ för varje par (h, k) med $(a + h, b + k) \in D$, där $B(h, k)$ är en begränsad funktion nära origo, (*Taylors formel av grad 2*)

Uttrycket $P_1(h, k) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k$ är *Taylorpolinom av grad 1.*

Uttrycket $P_2(h, k) = f(a, b) + f'_x(a, b)h + f'_y(a, b)k + \frac{1}{2}(f''_{xx}(a, b))h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}(a, b)k^2)$ är *Taylorpolinom av grad 2.*

Motivering (sida 95). Låt $\overline{v}(h, k)$ vara en riktningsvektor för den rätta linjen $l : x = a + t \cdot h,\ y = b + t \cdot k,\ t \in R$. Ta restriktionen $f|_l = f(a + t \cdot h, b + t \cdot k) = F(t), t \in R$. Obs $F(1) = f(a + h, b + k),\ F(0) = f(a, b)$. Använd nu Maclaurins formel från en-variabel analys då $t = 1$. Repetera att $F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \frac{1}{3!}F'''(\theta(1))$ (*).
Finn nu $F'(0), F''(0), F'''(\theta(1))$:
$F'(t) = f'_x(a + t \cdot h, b + t \cdot k) \cdot h + f'_y(a + t \cdot h, b + t \cdot k) \cdot k$ och $F'(0) = f'_x(a, b) \cdot h + f'_y(a, b) \cdot k$.
Fortsätt med $F''(t) = f''_{xx}(a + t \cdot h, b + t \cdot k) \cdot h^2 + f''_{xy}(a + t \cdot h, b + t \cdot k) \cdot hk + f''_{yx}(a + t \cdot h, b + t \cdot k) \cdot hk + f''_{yy}(a + t \cdot h, b + t \cdot k) \cdot k^2$. Lägg märke till att $f''_{xy} = f''_{yx}$ om $f \in C^2$ (sida 87). Så är $F''(0) = f''_{xx}(a, b))h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}(a, b)k^2$. Analogt med F'''. Stoppa in funna uttryck i (*).

Ex 6. Taylor utveckla funktionen $f(x, y) = cos(x + 2y)$ kring $(0, 0)$.
Lsg. Beräkna $f(0, 0) = 1,\ f'_x(0, 0) = 0,\ f'_y(0, 0) = 0,\ f''_{xx}(0, 0) = -1,\ f''_{xy}(0, 0) = -2,\ f''_{yy}(0, 0) = -4$. Sätt in funna värden i Taylors formel. Då får man
$f(x, y) = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2}(-x^2 + 2(-2)xy - 4y^2) + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \cdot B(x, y)$, där $B(x, y)$ är en begränsad funktion nära $(0, 0)$.