Fö 4:

September 15, 2020

Lokala extrempunkter

• Låt $f(x,y) : D_f \subseteq R^2 \to R$ vara en funktion och $(a,b) \in D_f$.

Definition (sida 99): Funktionen f har *ett (resp. strängt) lokalt maximivärde* i punkten (a,b) om $f(x,y) \leq f(a,b)$ (*resp.* $f(x,y) < f(a,b)$) för alla punkter (x,y) nära (a,b) (det sista innebär att det finns ett $\delta > 0$ s. a. olikheten gäller för alla $(x,y) \in D_f$ med $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$).
Punkten (a,b) kallas *en (resp. sträng) lokal maximipunkt.*

• Analogt kan införas *ett (strängt) lokalt minimivärde* och *en (sträng) lokal minimipunkt.*

• Låt $d(x,y) = f(x,y) - f(a,b)$. Observera att $f(x,y) \leq f(a,b)$ omm $d(x,y) \leq 0$, och $f(x,y) \geq f(a,b)$ omm $d(x,y) \geq 0$.
Sammanfatta: f har ett lokalt extremvärde i P omm $d(x,y)$ byter ej tecken på en omgivning av P.

Sats (sida 86): Om funktionen f har *ett lokalt extremvärde* (= ett lokalt maximivärde eller ett lokalt minimivärde) i en punkt $P \in \text{Int } D_f$ och f är partiellt deriverbar i P så är $f'_x(P) = 0$ och $f'_y(P) = 0$ (d v s $\nabla f(P) = \overline{0}$.)

Följd: Låt $Q \in \text{Int } D_f$, f vara partiellt deriverbar i Q och $\nabla f(Q) \neq \overline{0}$. Då är Q ingen lokal extrempunkt.

Ex 1 Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 + y$, $(x,y) \in R^2$. Är origo en lok. extrempunkt? Notera att $\nabla f(\text{ origo }) = (0,1) \neq \overline{0}$ så är origo ingen lokal extrempunkt

Definition (sida 100): En punkt P, där $\nabla f(P) = \overline{0}$, kallas *en stationär punkt.*

Ex 2 Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in R^2$. Observera att $f(0,0) = 0$

och $\nabla f(0,0) = \overline{0}$ (origo är en stationär punkt). Men $f(x,0) = x^2 > 0$ (om $x \neq 0$) och $f(0,y) = -y^2 < 0$ (om $y \neq 0$). Så är origo ingen lokal extrempunkt.
=> Stationära punkter behöver ej vara lokala extrempunkter.

• *Hur hittar man lokala extrempunkter för en funktion? Uppsökningsschema:*

För att finna de lokala extrempunkterna för f behöver vi undersöka
i) *inre* stationära punkter;
ii) *inre* punkter, där $\nabla f(P)$ inte existerar;
iii) *randpunkter* (om sådana ingår i D_f).

Analogt i rummet.

Ex 3 (En motivering) Betrakta $f(x,y) = x^2 + y^2$ och $g(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$, där $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(i) Notera att origo är en lok. minimipunkt för f och alla punkter på randen till D är lok. maximipunkter för f.

(ii) Notera att origo är en lok. maximipunkt för g och alla punkter på randen till D är lok. minimipunkter för g.

Vad säges om $\nabla f($ origo $)$, resp. $\nabla g($ origo $)$? Svar: $\nabla f($ origo $) = (0,0)$ och $\nabla g($ origo $)$ existerar ej.

Kvadratiska former

Definition (sida 101): *En kvadratisk form* $Q(h,k)$ i två variabler är ett uttryck av formen $Q(h,k) = Ah^2 + Bhk + Ck^2$, där A, B, C är konstanter.
Observera att $Q(0,0) = 0$ alltid.

• Man kan införa kvadratiska former av tre (och fler) variabler.

Klassificering av kvadratiska former (sida 102):

Definition: i) Om $Q(h,k) \geq 0$ för alla par (h,k) och ekv $Q(h,k) = 0$ (m a p h,k) har *bara en* lösning (d v s paret $(h,k) = (0,0)$) då säger vi att formen Q är *positivt definit*,

Ex 4. $Q(h,k) = h^2 + k^2$;

ii) Om $Q(h,k) \geq 0$ för alla par (h,k) och ekv $Q(h,k) = 0$ (m a p h,k) har *fler än en* lösning då säger vi att formen Q är *positivt semidefinit*,

Ex 5. $Q(h,k) = h^2$ (Obs $Q(0,1) = 0$);

iii) Om $Q(h,k) \leq 0$ för alla par (h,k) och ekv $Q(h,k) = 0$ (m a p h,k) har *bara en* lösning då säger vi att formen Q är *negativt definit*,

Ex 6. $Q(h,k) = -h^2 - k^2$;

iv) Om $Q(h,k) \leq 0$ för alla par (h,k) och ekv $Q(h,k) = 0$ (m a p h,k) har *fler än en* lösning då säger vi att formen Q är *negativt semidefinit*,

Ex 7. $Q(h,k) = -h^2$ (Obs $Q(0,1) = 0$);

v) Om $Q(h,k)$ antar såväl positiva som negativa värde då säger vi att Q är *indefinit*,

Ex 8. $Q(h,k) = hk$ (Obs $Q(1,1) = 1 > 0$ och $Q(1,-1) = -1 < 0$).

• Analogt med kvadratiska former av tre (och fler) variabler.

Lokal undersökning

• Låt $f : D_f \subseteq R^2 \to R$ vara en funktion, $P \in D_f$ och $f''_{xx}(P), f''_{xy}(P), f''_{yy}(P)$ existerar.

Uttrycket $Q(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$ kallar vi *en kvadratisk form för funktionen f i punkten P.*

Sats (sida 102): Låt f vara en C^3-funktion i en öppen mängd $D_f \subseteq R^2$ och $P \in D_f$ en stationär punkt för f. Då gäller följande.

i) Om formen $Q(h,k)$ är *positivt definit* så är punkten P en sträng lokal minimipunkt;

ii) Om $Q(h,k)$ är *negativt definit* så är P en sträng lokal maximipunkt;

iii) Om $Q(h,k)$ är *indefinit* så är P *en sadelpunkt* (ingen lokal extrempunkt);

iv) Om $Q(h,k)$ är *semidefinit* så kan man inte säga något bestämt om punkten m h a formen och då *måste resttermen* undersökas (se ex 38 sida 109).

Ex 9. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in R^2$. Finn alla lokala extrempunkter till f.

Följ uppsökningsschemat. Observera att $D_f = R^2$ (samtliga punkter i planet är inre punkter för D_f d v s inga randpunkter), och ∇f existerar för alla punkter i planet d v s inga punkter, där ∇f saknas. Dessutom, $\nabla f = \overline{0}$ omm $x = y = 0$. Så är origo en enda stationär punkt. Den kvadratiska formen i origo är $Q(h,k) = 2h^2 + 2k^2$, positivt definit.

Så är origo är en strängt (lokal) minimipunkt.

Ex 10. Bestäm alla lokala extrempunkter till funktionen $f(x,y) = 20 + x^2 + 2y^2 + 4xy - x^4$, $(x,y) \in R^2$.

Lsg. Observera att $D_f = R^2$ (samtliga punkter i planet är inre punkter för D_f d v s inga randpunkter), och ∇f existerar för alla punkter i planet d v s inga punkter, där ∇f saknas. Finn nu alla stationära punkter och undersök dem:
$\nabla f = \overline{0} \;\Leftrightarrow$ systemet $2x + 4y - 4x^3 = 0$ och $4y + 4x = 0$. Man får att $-4x = 4y$ och $2x - 4x - 4x^3 = 0$. Det medför att $x = 0$ och $y = 0$ d v s $(0,0)$ är en enda stationär punkt.
Betrakta den kvadratiska formen i punkten $(0,0)$:
Beräkna $f''_{xx}(0,0) = 2$, $f''_{xy}(0,0) = 4$, $f''_{yy}(0,0) = 4$. Så är $Q(h,k) = 2h^2 + 8hk + 4k^2$.
Kvadratkomplettera formen: $Q(h,k) = 2((h+2k)^2 - 2k^2)$.
Observera att om $h + 2k = 1$ och $k = 0$ ($\Leftrightarrow$ $(h,k) = (1,0)$) så har vi $Q(1,0) = 2 > 0$;
och om $h + 2k = 0$ och $k = 1$ ($\Leftrightarrow$ $(h,k) = (-2,1)$) så har vi $Q(-2,1) = -4 < 0$.

Vi får att Q är indefinit och origo är en sadelpunkt.

Ex 11. Är origo en lokal extrempunkt för funktionen $f(x,y) = 2 + 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 6x^4$, $(x,y) \in R^2$?

Lsg. Observera att origo är en stationär punkt för f och den kvadratiska formen i origo är positivt semidefinit. Satsen om kvadratiska former hjälper inte längre. Då kan vi prova att handla enligt definitionen. Betrakta differensen $d(x,y) = f(x,y) - f(0,0)$ och undersök dess tecken nära origo. Observera att $d(x,y) = (2x + 3y)^2 + 6x^4 \geq 0$ för alla punkter (x,y) i planet. Så är $f(x,y) \geq f(0,0)$ för alla punkter (x,y) i planet. Det sista innebär att vi har en lokal (även global) minimipunkt i origo.

Extra uppgift A: Visa att origo är en stationär punkt för funktionen $f(x,y) = 2 - 4x^2 - 12xy - 9y^2 + 6x^3$, $(x,y) \in R^2$, den kvadratiska formen i origo är negativt semidefinit och själva origo är ingen lok. extrempunkt (d v s en sadelpunkt.)

- Analogt med funktioner av tre (och fler) variabler.