Fö 5:

September 16, 2020

Optimering

• Låt $f : D \subseteq R^n \to R$, $n \geq 1$.

Definition. f har *ett största värde* eller *ett maximivärde* i D om det finns en punkt $P_0 \in D$ s. a. $f(P) \leq f(P_0)$ för alla $P \in D$.
Värdet $f(P_0)$ kallas *ett största värde* (eller ett maximivärde) av f i D och P_0 *en maximipunkt.*

• Observera att punkten P_0 är också en lokal maximipunkt.

• Analogt kan man införa *ett minsta värde* (*ett minimivärde*) och *en minimipunkt.*

En extrempunkt är en maximipunkt eller en minimipunkt och *ett extremvärde* är ett största värde eller ett minsta värde.

• *Optimeringsproblem för f:* Sök extremvärden för f samt extrempunter, där extremvärdena antas.

• Observera att ett maximivärde eller ett minimivärde behöver inte existera:

Ex 1. Låt $f(x,y) = x^2 - y^2, (x,y) \in R^2$. Ty $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \infty$ och $\lim_{y\to\infty} f(0,y) = -\infty$, saknas extremvärden. Lägg märke till att funktionen f är kontinuerlig på R^2 och R^2 är icke-kompakt.

Ex 2. Låt $g(x,y) = \arctan(x^2+y^2)$, $(x,y) \in R^2$. Ty $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \frac{\pi}{2}$ och $f(x,y) < \frac{\pi}{2}$ för alla punkter $(x,y) \in R^2$ saknas maximivärdet för f men minsta värdet är lika med 0 och antas i origo. Notera att funktionen g är kontinuerlig på R^2.

Ex 3. Låt $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ och $h(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, om $(x,y) \in D \setminus \{(0,0)\}$ och $h(0,0) = -1$. Ty $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = -\infty$ saknar h minimivärdet men har maximivärdet

-1 som antas på cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ och i origo. Lägg märke till att funktionen h är diskontinuerlig i origo och D är kompakt.

Optimering av kontinuerliga funktioner på kompakta områden

Sats (sida 41): Om $f : D \subseteq R^n \to R$, $n \geq 1$, är kontinuerlig på D och D är kompakt så har f såväl största som minsta värde på D.

• *Hur hittar man extremvärde för f i fallet?*

Notera att
1) $D = IntD \cup \text{Bd } D$, och
2) Om $f(P_0)$ är ett extremvärde och $P_0 \in IntD$ så är P_0 en *inre* lokal extrempunkt.
Då är $\nabla f(P_0) = \overline{0}$ eller $\nabla f(P_0)$ existerar inte.

• *Uppsökningsschemat för kontinuerliga funktioner definierade på kompakta områden:* (sida 159)

0) Repetera att extremvärden och extrempunkter existerar enligt satsen.
1) Finn kandidater för extrempunkter av f som ligger i $IntD$:
 a) alla *inre* punkter till D, där $\nabla f = \overline{0}$;
 b) alla *inre* punkter till D, där ∇f inte existerar;
2) Finn kandidater för extrempunkter av f som ligger på BdD
(det kommer att diskuteras senare);
3) Beräkna funktionensvärde i funna punkter och sedan välj mellan de erhållna värden största och minsta.

Ex 4. Sök max och min för $f(x, y) = y^2 + (x^2 - 1)y$ på en sluten triangel med hörn i $A(-2, -2)$, $B(2, 2)$, $C(2, -2)$.

Lsg. Först, rita en bild.
• Observera att den slutna triangeln ΔABC är kompakt, och funktionen f är kontinuerlig på den. Enligt satsen ovan har f såväl största som minsta värde i vissa punkter.

• Följ schemat.
1) Ekvationen $\nabla f = \overline{0}$ är ekvivalent systemet: $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$, eller $2xy = 0$ (1) och $2y + x^2 - 1 = 0$ (2). Observera att ekv (1) ger $x = 0$ eller $y = 0$. Sätt in $x = 0$ i ekv (2). Vi får $y = \frac{1}{2}$ och en punkt $(0, \frac{1}{2})$. Sätt in $y = 0$ i ekv (2). Vi får $x = \pm 1$ och två punkter $(1, 0)$, $(-1, 0)$.
Är funna punkterna $(0, \frac{1}{2})$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ kandidatpunkter?

Observera att punkten $(1,0)$ ligger i Int D, denna är en kandidatpunkt och $f(1,0) = 0$ ett kandidatvärde. Övriga punkter ligger utanför Int D, så är de inga kandidatpunkter och vi kastar bort dem.

Fortsätt med schemat.

Observera att det finns inga punkter där ∇f inte existerar.

2) Lägg märke till att $Bd(\Delta ABC) = AB \cup BC \cup AC$. Dessutom om någon punkt Q på $Bd(\Delta ABC)$ är en extrempunkt för f så är Q en extrempunkt för restriktionen $f|_{Bd(\Delta ABC)}$. Ännu mer, om, till exempel, punkten Q ligger på sträckan AB så är punkten Q en extrempunkt för restriktionen $f|_{AB}$.

Den här observationen visar oss vägen hur man kan studera f på randen till triangeln ΔABC: vi ska lösa optimeringsproblem för samtliga restriktioner $f|_{AB}, f|_{BC}, f|_{AC}$.

• Betrakta AC. Först parametrisera AC (detta betyder att vi ska införa en parameter längs sträckan), till exempel: $x = x$ och $y = -2, x \in [-2,2]$ (parametern är variabeln x). Ta nu restriktionen $f|_{AC} = f(x,-2) = 6 - 2x^2 = g_1(x), x \in [-2,2]$. Lägg märke till att restriktionen $f|_{AC}$ och funktionen g_1 har samma värdemängd, bl. a. samma extremvärde.

Undersök $g_1(x)$ enligt en-variabel analys:

Derivera $(g_1(x))' = -4x$. Ekvationen $(g_1(x))' = 0$ har en lösning $x = 0$. Observera att $0 \in (-2,2)$ är en inre stationär punkt (en kandidatpunkt) för g_1 betraktad på intervallet $[-2,2]$.

Beräkna $g_1(0) = f(0,-2) = 6$. Observera vidare att -2 och 2 är ändpunkter till $[-2,2]$ (kandidatpunkter för g_1). Så även beräkna $g_1(-2) = f(-2,-2) = -2, g_1(2) = f(2,-2) = -2$. Sammanfatta: punkterna $(0,-2), (-2,-2), (2,-2)$ är kandidatpunkter på sträckan AC och värdena 6 och -2 är kandidatvärden.

• BC. Parametrisera sträckan: $x = 2$ och $y = y, y \in [-2,2]$. Restriktionen $f|_{BC} = f(2,y) = y^2 + 3y = g_2(y), y \in [-2,2]$.

Derivera $(g_2(y))' = 2y + 3$. Ekvationen $(g_2(y))' = 0$ är ekvivalent ekvationen $2y + 3 = 0$ Så är $y = -\frac{3}{2} \in (-2,2)$ (kontroll !!) en kandidatpunkt för g_2.

Beräkna $g_2(-\frac{3}{2}) = f(2,-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{4}$ samt $g_2(-2) = f(2,-2) = -2$ och $g_2(2) = f(2,2) = 10$. Sammanfatta: $(2,-\frac{3}{2}), (2,-2), (2,2)$ är kandidatpunkter på sträckan BC med kandidatvärden $-\frac{9}{4}, -2, 10$.

• AB. Parametrisering: $x = x$ och $y = x, x \in [-2,2]$. Restriktionen $f|_{AB} = f(x,x) = x^2 + (x^2-1)x = x^3 + x^2 - x = g_3(x), x \in [-2,2]$.

Derivera $(g_3(x))' = 3x^2 + 2x - 1$. Ekvationen $(g_3(x))' = 0$ har två lösningar $x = -1, \frac{1}{3} \in$

$(-2, 2)$ (kontroll !!) som är kandidatpunkter för g_3.

Beräkna $g_3(-1) = f(-1,-1) = 1$, $g_3(\frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{5}{27}$ och $g_3(-2) = f(-2,-2) = -2$, $g_3(2) = f(2,2) = 10$. Sammanfatta: $(-1,-1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (-2,-2), (2,2)$ är kandidatpunkter på sträckan AB med kandidatvärden $1, -\frac{5}{27}, -2, 10$.

4) Välja max och min emellan funna kandidatvärden:
$0, 6, -2, -\frac{9}{4}, 10, 1, -\frac{5}{27}$.
Svar: max $= 10$ antas i punkten $(2, 2)$ och min $= -\frac{9}{4}$ antas i punkten $(2, -\frac{3}{2})$.

Extra: Läs ex 1 (sida 138).

Ex 5. Sök max och min för $f(x, y) = y \cdot x^2$ på cirkelshivan $x^2 + y^2 \leq 1$.

Lsg. Vi tittar bara på hur man kan arbeta med randen till skivan.

Sätt 1. Dela upp cirkeln $C : x^2+y^2 = 1$ i två delar höger H och vänster V. Parametrisera H: $x = \sqrt{1-t^2}, y = t, t \in [-1, 1]$. Då är restriktionen $f|_H = t \cdot (1-t^2) = t - t^3 = g_1(t), t \in [-1, 1]$. Analogt med V.

Sätt 2. Använd polära koordinater för att parametrisera hela cirkeln C: $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Då är restriktionen $f|_C = \sin t \cdot \cos^2 t = h(t), t \in [0, 2\pi]$.

Avsluta själv. Svar: max $= \frac{2}{3\sqrt{3}}$, min $= -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Några ord till om värdemängden av en kontinuerlig funktion

Ex 6. Betrakta en kvadratisk form $Q(h, k) = Ah^2 + Bhk + Ck^2$. Då följande gäller. Om formen Q är positivt (resp. negativt) definit så finns det en konstant $c > 0$ s. a. $Q(h, k) \geq c \cdot (h^2 + k^2)$ (resp. $Q(h, k) \leq -c \cdot (h^2 + k^2)$) för alla (h, k).
Observera också att $Q(at, bt) = t^2 \cdot Q(a, b)$ för alla vektorer (a, b) och alla $t \in R$.
Tillsammans med Taylors formel medför Ex 6 satsen om lokala extremvärden från Fö 4.

Sats. Låt $f : D_f \subset R^n \to R$ vara en kontinuerlig funktion, $P, Q \in D_f$ och $f(P) \leq f(Q)$. Om det finns en kontinuerlig kurva $\overline{r}(t) : [a, b] \to D_f$ s. a. $\overline{r}(a) = P$ och $\overline{r}(b) = Q$, så hör intervallet $[f(P), f(Q)]$ värdemängden till f.

Ex 7. Betrakta en kvadratisk form $Q(h, k) = Ah^2 + Bhk + Ck^2$. Då följande gäller. Om formen Q är indefinit så finns det en nollskildvektor (a, b) s. a. $Q(at, bt) = 0$ för alla $t \in R$.