Fö 6:

September 22, 2020

Optimering av kontinuerliga funktioner på icke-kompakta områden

Låt $f : D \subseteq R^n \to R$, f vara kontinuerlig på D och D icke-kompakt, $n \geq 1$.

• Repetera att existensen av extremvärden INTE längre är garanterad.

Ex 1: Låt $f(x, y) = x^2 - y^2, (x, y) \in R^2$. Funktionen f saknar extremvärden (se Fö 5).

Vi ska betrakta två sökningsmetoder som hjälper oss att avgöra om extrempunkter (resp. extremvärden) finns och om de existerar var (resp. vad) de är (resp. lika med).

• *Metod 1* (sida 163): En lämplig kompakt avskärning av definitionsmängden.

Ex 2: Sök max och min av $f(x, y) = \frac{x}{1+x^2+y^2},\ D = R^2$.

Lsg. Observera att f är kontinuerlig på D men D är obegränsat (bl. a. icke-kompakt).

En kompakt avskärning av området:
man delar upp $D = D_R \cup (D \setminus D_R)$ i två disjunktna (= utan gemensamma punkter) delar D_R och $D \setminus D_R$ s. a. att en del är kompakt och andra delen är lätt att undersöka.
Hur? Det ska avslöjas nedan.

Låt $D_R = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$ (= en sluten cirkelskiva med radie $R > 0$ och med centrum i origo) i fallet. Observera att D_R är kompakt och restriktionen $f|_{D_R}$ är kontinuerlig på D_R. Så har $f|_{D_R}$ största och minsta värden (se Fö 5).

1) Optimera $f|_{D_R}$:
Starta med ekvationen $\nabla f = \overline{0}$ eller systemet: $\frac{(1+x^2+y^2)-2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$ och $\frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0$. Transformera det sista till systemet: $1 + y^2 - x^2 = 0$ (1) och $xy = 0$ (2). Observera att ekvationen (2) ger $x = 0$ eller $y = 0$. Sätt in värdena i ekvationen (1).
Om $x = 0$ så är $1 + y^2 = 0$. Det finns inga lösningar.

Om $y = 0$ så är $1 - x^2 = 0$. Vi får $x = \pm 1$.

Det leder till två inre stationära punkter $(1,0), (-1,0)$ för $f|_{D_R}$

om R är tillräkligt stor, säg större än 1 i fallet (*).

Beräkna $f(1,0) = \frac{1}{2}$ och $f(-1,0) = -\frac{1}{2}$ (kandidatvärden).

Nästa steg är att undersöka funktionensbeteende på randen till D_R.

Använd polära koordinater vid parametriseringen av randen (= cirkel med radie R och centrum i origo).

Observera att $|f|_{Bd(D_R)}| = |\frac{R\cos\phi}{1+R^2(\cos\phi)^2+R^2(\sin\phi)^2}| \leq \frac{R}{1+R^2} \to 0$ då $R \to \infty$

(gränsvärdet till höger innebär att för varje positivt tal ϵ finns det ett positivt tal R_ϵ s. a. vi har $\frac{R}{1+R^2} < \epsilon$ för varje $R \geq R_\epsilon$).

Välj $\epsilon = \frac{1}{4}$ (eller vilken som helst positiv konstant $< \frac{1}{2}$) och repetera att det finns $R_{\frac{1}{4}}$ s. a. $\frac{R}{1+R^2} < \frac{1}{4}$ för varje $R \geq R_{\frac{1}{4}}$ (**).

Låt R satisfierar både restriktionerna (*) och (**).

De här villkoren medför att $\max f|_{D_R} = \frac{1}{2}$ antas i $(1,0)$ och $\min f|_{D_R} = -\frac{1}{2}$ i $(-1,0)$ ty functionensvärden på randen hör till intervallet $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

2) Lägg märke till att olikheten $(**)$ säger även att $|f|_{D \setminus D_R}| < \frac{1}{4}$ ty man kan fylla i mängden $D \setminus D_R$ med cirklar med radie $> R_{\frac{1}{4}}$. Det betyder att funktionens beteendet på delen $D \setminus D_R$ kan inte påverka på vårt val av extremvärden för f på hela D.

Vi får slutligen att $\max f = \frac{1}{2}$ antas i $(1,0)$ och $\min f = -\frac{1}{2}$ i $(-1,0)$.

- *Metod 2* (sida 166): En reduktion till en-variabel analys.

Ex 3: Sök max och min av $f(x,y) = \frac{xy}{4+(x+y)^2}$, $D = \{x, y \geq 0\}$ (= första kvadranten).

Observera att funktionen f är kontinuerlig på D men området D är obegränsat, bl. a. icke-kompakt.

Betrakta följande uppdelningen av D: $D = \cup_{m \geq 0} D_m$, där D_m är sträckan mellan punkterna $(m,0)$ och $(0,m)$ i planet. Lägg märke till att D_m är kompakt för varje m.

1) Sök max och min av restriktionen $f|_{D_m}$ ($m > 0$ är fixerad).

Först, parametrisera D_m. En möjlig parametrisering: $x = x$ och $y = m - x, x \in [0,m]$.

Uttryck $f|_{D_m} = f(x, m-x) = \frac{x(m-x)}{4+m^2} = g_m(x), x \in [0,m]$.

Optimera funktionen g_m som i en-variabel analys.

Beräkna $(g_m(x))' = \frac{1}{4+m^2}(m - 2x)$. Lös ekvationen $(g_m(x))' = 0$. Vi får en rot $x = \frac{m}{2} \in (0,m)$ (kontrollera !!). Så är $\frac{m}{2}$ en stationär punkt för g_m.

Beräkna $g_m(\frac{m}{2}) = \frac{m^2}{4(4+m^2)}$ och $g_m(0) = g_m(m) = 0$. Välj max och min av funna värdena.

Vi får $\max f|_{D_m} = \frac{m^2}{4(4+m^2)} = \phi(m)$, $\min f|_{D_m} = 0 = \psi(m), m \in [0, \infty)$.

2) Lägg märke till att $\max f = \max \phi$ och $\min f = \min \psi$
(VL och HL existerar eller icke existerar samtidigt).

3) Sök $\max \phi$ och $\min \psi$:
Observera att
a) $\phi(m) = \frac{1}{4}(1 - \frac{4}{4+m^2})$ (rita grafen!) och $\max \phi$ existerar INTE. Så $\max f$ existerar ej.
b) $\min \psi = 0$. $\Rightarrow$ $\min f = 0$ antas på x, y-axlarna.

Se även ex 4-6 sidor 164-167

Några förberedelser till nästa optimerings del.

Skärningen av två nivåytor i rummet.

- Låt $f, g : D \subseteq R^3 \to R$ och $P \in D$.

Sats: Anta att $f, g \in C^1(D)$, $\nabla f(P) \times \nabla g(P) \neq \overline{0}$ och $f(P) = c_1$, $g(P) = c_2$. Då är skärningen av nivåytorna $f(x, y, z) = c_1$ och $g(x, y, z) = c_2$ nära punkten P värdemängden av en kurva $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(z)), t \in (a, b)$, i rummet s. a. $\overline{r}(t_0) = P$ för någon $t_0 \in (a, b)$. Dessutom, $\overline{r}'(t_0) || \nabla f(P) \times \nabla g(P)$.

Ex 4: (En motivering.) Betrakta funktioner $f(x, y, z) = 2x + 3y - z + 1$ och $g(x, y, z) = x - y + 2z + 3$ på hela rummet och låt P vara origo. Observera att $f, g \in C^1(R^3)$, $\nabla f(P) = (2, 3, -1)$, $\nabla g(P) = (1, 1, 2)$, $\nabla f(P) \times \nabla g(P) = (5, -5, -5) \neq \overline{0}$ och $f(0, 0, 0) = 1$, $g(0, 0, 0) = 3$. Nivåytorna $f = 1$ och $g = 3$ är två icke parallella plan: $2x + 3y - z = 0$ och $x - y + 2z = 0$ med skärningen som är den räta linjen $\overline{r}(t)$: $x(t) = -t, y(t) = t, z(t) = t, t \in R$. Lägg märke till att $\overline{r}(0) = P$ och $\overline{r}'(0) = (-1, 1, 1) || (5, -5, -5) = \nabla f(P) \times \nabla g(P)$.

En del av bevis. Vi ska visa att $\overline{r}'(t_0) || \nabla f(P) \times \nabla g(P)$.
Observera att $f(\overline{r}(t)) = c_1$ eller $f(x(t), y(t), z(t)) = c_1$ för varj $t \in (a, b)$.
Derivera likheten m a p t (använd kedjeregeln):
vi får $(VL)' = f'_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + f'_y(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + f'_z(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) = 0 = (HL)'$ för varj $t \in (a, b)$ bl. a. för $t = t_0$.
Det sista är $\nabla f(P) \cdot \overline{r}'(t_0) = 0$ eller $\nabla f(P) \perp \overline{r}'(t_0)$. Samma gäller for g.
Således, $\overline{r}'(t_0) || \nabla f(P) \times \nabla g(P)$.