Fö 7:

July 29, 2020

Optimering med ett bivillkor

• Låt $f : D_f \subseteq R^2 \to R$, $g : D_g \subseteq R^2 \to R$ vara funktioner av klass C^1 definierade på öppna delmängder D_f och D_g till R^2 och c en konstant.

Problem 1: Sök extremvärde av $f(x,y)$ då (x,y) uppfyller ekvationen $g(x,y) = c$ (ekvationen kallas *ett bivillkor*).

Undersökning. Låt punkten P_0 höra till mängden $\{(x,y) : g(x,y) = c\}$.

1) Antag också att $\nabla g(P_0) \neq \overline{0}$. Då (se Fö 3, delen om gradienter) existerar det en rektangel W s.a. den bit av nivåkurvan $g = c$ som ligger innanför W kan parameterframställas: $\overline{r}(t):\ x = x(t), y = y(t), t \in (a,b), 0 \in (a,b)$ och $\overline{r}(0) = P_0$.

Dessutom $\nabla g(P_0) \perp \overline{r}'(0) = (x'(0), y'(0)) \qquad (*)$.

Det sista kan bevisas så här:
Notera att $g(x(t), y(t)) = c$ för alla $t \in (a,b)$.
Derivera både leden av sista likheten:
$g'_x(x(t), y(t))x'(t) + g'_y(x(t), y(t))y'(t) = 0$ för alla $t \in (a,b)$.
Sätt in $t = 0$ i VL ovan. Vi får
$g'_x(P_0)x'(0) + g'_y(P_0)y'(0) = \nabla g(P_0) \cdot \overline{r}'(0) = 0$.

2) Antag att P_0 är också en punkt i D_f och restriktionen $f|_{g=c}$ har ett lokalt extremvärde i P_0. Så har funktionen $h(t) = f(x(t), y(t)), t \in (a,b)$, ett lokalt extremvärde i 0. Därför att $0 \in (a,b)$ och $h'(0)$ existerar, vi får $h'(0) = 0$.

Räkna $h'(0) = |$ använd kedjeregeln $| = f'_x(P_0)x'(0) + f'_y(P_0)y'(0) = \nabla f(P_0) \cdot \overline{r}'(0) = 0$

Man får nu att $\nabla f(P_0) \perp \overline{r}'(0) = (x'(0), y'(0)) \qquad (**)$.

Relationerna (*) och (**) medför att $\nabla f(P_0) \parallel \nabla g(P_0)$ (eller vektorerna $\nabla f(P_0)$ och $\nabla g(P_0)$ är linjärt beroende).

Även om $\nabla g(P_0) = \overline{0}$ så får vi detsamma (linjärt beroendet). Sammanfatta:

Sats (sida 173): I en gemensam punkt P_0 för D_f och D_g där restriktionen $f(x,y)|_{g(x,y)=c}$ har ett lokalt extremvärde (bl. a. extremvärde) gäller att $\nabla f(P_0) \parallel \nabla g(P_0$. (eller vektorerna $\nabla f(P_0)$ och $\nabla g(P_0)$ är linjärt beroende).

Ex 1. Sök max och min av $f(x,y) = 6 + x^2 - 3y^2 - 3\ln(1 + x^2 + y^2)$
på cirkeln $C : x^2 + y^2 = 3$ (ett bivillkor).

Lsg. Första steget. Definiera $g(x,y) = x^2 + y^2, (x,y) \in R^2$.
Observera att

1) cirkeln C är kompakt och funktionen f är kontinuerlig på C så antar restriktionen $f|_C$ (man kan även säga funktionen f) ett största och minsta värde i vissa punkter på cirkeln.

2) $D_f = D_g = R^2$. Så är D_f och D_g öppna delmängder till R^2.

Enligt satsen satisfierar extrempunkter P_0 systemet: $\nabla f \parallel \nabla g$ och $g = 3$ (två villkor)

Observera att villkoret $\nabla f \parallel \nabla g$ är ekvivalent likheten $\det(A) = 0$ där A är en matris bestående av koordinater av vektorerna ∇f och ∇g.

Vi får att vårt system är ekvivalent med systemet: $16xy = 0, x^2 + y^2 = 3$ som har lösningar $(-\sqrt{3}, 0), (\sqrt{3}, 0), (0, -\sqrt{3}), (0, \sqrt{3})$.

Andra steget: Räkna ut funktionensvärden i funna punkterna.
$f(0, \pm\sqrt{3}) = -3 - 3\ln 4$ och $f(\pm\sqrt{3}, 0) = 9 - 3\ln 4$.

Tredje steget: Välj max och min av de erhållna värdena,
$\max f = 9 - 3\ln 4$ och $\min f = -3 - 3\ln 4$.

• 1) I stället för ekv det A = 0 kan man använda *Lagranges multiplikatorer* (se sida 174).
• 2) Exemplet kunde lösas även genom att parametrisera cirkeln till ex. med polära koordinater.

Anm. Vårt resonemang kan utvidgas till fler än två variabler (se sida 177, ex. 10), där Lagranges multiplikatormetod diskuteras.

Optimering med två bivillkor

• Låt $f : D_f \subseteq R^3 \to R$, $g : D_g \subseteq R^3 \to R$, $h : D_h \subseteq R^3 \to R$ vara funktioner av klass C^1 definierade på öppna delmängder D_f, D_g och D_h till R^3 och c_1, c_2 är konstanter.

Problem 2: Bestäm extremvärde av $f(x,y,z)$ då (x,y,z) uppfyller ekvationerna $g(x, y, z) = c_1$ och $h(x, y, z) = c_2$ (två bivillkor).

Undersökning:

1) Antag att $g(P_0) = c_1$, $h(P_0) = c_2$ för någon punkt P_0. Om vektorerna $\nabla g(P_0)$ och $\nabla h(P_0)$ är icke parallella (ekvivalent, $\nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0) \neq \overline{0}$) så definierar systemet: $g = c_1, h = c_2$ en kurva $\overline{r}(t) : x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in (a, b), 0 \in (a, b)$ och $P_0 = \overline{r}(0)$. Dessutom $\nabla g(P_0), \nabla h(P_0) \perp \overline{r}'(0)$ $\quad$ (#)

(Till ex. två icke-parallella plan definierar en rät linje, deras snitt; se även Fö 6, delen om skärningen av två ytor.)

2) Antag att punkten P_0 hör till D_f och restriktionen $f|_{\text{kurvan}}$ har ett lokalt extremvärde i P_0. Då är $\nabla f(P_0) \perp \overline{r}'(0)$ (det kan visas som förut) $\quad$ (##)

(#) och (##) medför att vektorerna $\nabla g(P_0), \nabla h(P_0), \nabla f(P_0)$ är parallella med ett plan (ty de är vinkelrätta mot vektorn $\overline{r}'(0)$ i rummet R^3).

Således är $\nabla g(P_0), \nabla h(P_0), \nabla f(P_0)$ linjärt beroende.

Även om $\nabla g(P_0) \parallel \nabla h(P_0)$ får man detsamma.

Vi har motiverat följande

Sats (sida 179): I en gemensam punkt P_0 för D_f, D_g, D_h där restriktionen $f|_{g=c_1, h=c_2}$ har ett lokalt extremvärde (bl.a. extremvärde) gäller att $\nabla g(P_0), \nabla h(P_0), \nabla f(P_0)$ är linjärt beroende.

Ex 2. Sök max och min av $f = 3x+2y+z$ då $x^2+y^2+z^2 = 1$ (en sfär) och $x+y+z = 1$ (ett plan).

Lsg. Första steget. Definiera $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ och $h(x, y, z) = x + y + z$. Låt $D = \{(x, y, z) : g = 1, h = 1\}$.

Observera att

1) D är kompakt och f är kontinuerlig på D. Så antar restriktionen $f|_D$ ett största och minsta värde i vissa punkter på D.

2) $D_f = D_g = D_h = R^3$. Så är D_f, D_g och D_h öppna delmängder till R^3.

Enligt satsen satisfierar extrempunkter systemet: $\nabla g(P_0), \nabla h(P_0), \nabla f(P_0)$ är linjärt beroende, $g = 1, h = 1$ (tre villkor).

Observera att villkoret $\nabla g(P_0), \nabla h(P_0), \nabla f(P_0)$ är linjärt beroende, är ekvivalent likheten $\det(A) = 0$ där A är en matris bestående av koordinater av vektorerna $\nabla f(P_0), \nabla g(P_0)$ och $\nabla h(P_0)$.

Så är vårt system ekvivalent systemet:$-2x + 4y - 2z = 0, g = 1, h = 1$ som har lösningarna: $A = (\frac{1+\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3})$ och $B = (\frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3})$.

Andra steget: Räkna ut funktionensvärde i de funna punkterna:
$f(A) = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ och $f(B) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Tredje steget: Välj max och min emellan de erhållna värdena:
$\max f$ på D är $f(A)$ och $\min f$ på D är $f(B)$.

Anm. Hur löser man problem med ostränga olikheter? Betrakta till ex.

Problem 3: Bestäm extremvärde av $f(x, y, z)$ då (x, y, z) uppfyller olikheterna $g(x, y, z) \leq c_1$ och $h(x, y, z) \leq c_2$.

Första. Avgör om området D definierat av olikheterna $g(x, y, z) \leq c_1$ och $h(x, y, z) \leq c_2$ är kompakt. Om D är kompakt, handla så här.

Finn kandidatpunkter som uppfyller följande fyra system:
(i) $\nabla f = \overline{0}, g < c_1, h < c_2$;
(ii) $\nabla f, \nabla g$ är linjärt beroende, $g = c_1, h < c_2$ (ett bivillkor);
(iii) $\nabla f, \nabla h$ är linjärt beroende, $g < c_1, h = c_2$ (ett bivillkor);
(iv) $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är linjärt beroende, $g = c_1, h = c_2$ (två bivillkor).

Andra. Räkna ut funktionensvärde i funna punkter.

Tredje. Välja max och min av de erhållna värdena.
Om D är icke-kompakt, så använd optimeringsmetoderna för icke-kompakta områden.