Fö 8:

December 14, 2023

Dubbelintegraler

Problem: Vad är volymen V av den kropp som ligger mellan ett område D (till ex. en rektangel) i $x, y-$planet och en funktionsyta $z = f(x, y)$ ovanför D?

Lsg Vi delar in D i små delområden $D_1, ..., D_n$ (rektanglar). På varje sådant delområde väljer vi en konstant $M_i > 0$ (Obs $f(x, y) > 0$ på D) och en konstant $m_i \geq 0, i = 1, ..., n$, s.a. $m_i \leq f(x, y) \leq M_i$ för varje punkt $(x, y) \in D_i$. Definiera *trappfunktioner*:

$h(x, y) = \{M_i : (x, y) \in D_i\} : D \to R$ (*en övertrappa*) och

$g(x, y) = \{m_i : (x, y) \in D_i\} : D \to R$ (*en undertrappa*).

Observera att

- $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$ för varje punkt $(x, y) \in D$, och

- $\Sigma_{i=1}^n m_i \cdot (\text{arean av} D_i) \leq \Sigma_{i=1}^n M_i \cdot (\text{arean av} D_i) \qquad (\#)$,

där summan till vänster är volymen för *underkroppen* och summan till höger volymen för *överkroppen*.

Notera att volymen för en överkropp är alltid större eller lika med volymen för en underkropp (även om vi räknar dem för olika uppdelningar av området D etc).

Def. Om det går att få skillnaden $\Sigma_{i=1}^n M_i \cdot (\text{arean av} D_i) - \Sigma_{i=1}^n m_i \cdot (\text{arean av} D_i)$ *godtyckligt liten* säger vi att volymen V är *det entydigt bestämt tal* som uppfyller (#) för varje indelning av D och varje urval av m_i och M_i.

Beteckning: $V = \int\int_D f(x, y)dxdy$, där

$dxdy$ tolkas som ett litet areaelement, $f(x, y)dxdy$ ett litet volymelement,

$\int\int$ ett summatecken.

Observera att

- Ovanstående kan göras även om f inte är positiv och området D är mer komplicerat.

På så sätt får man definitionen av *dubbelintegral av f över D* (se def 1 sida 233, sats 1 sida 233). I fallet säger man att f är *integrerbar på D*.

- $\int\int_D 1 \, dxdy =$ arean av D.

Fråga: Existerar det dubbelintegraler $\int\int_D f dxdy$ för alla funktioner f? Svar: Nej.

Ex 1. Låt $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ (en kvadrat) och $f : D \to R$ s. a. $f(x, y) = 0$ om x, y är rationella tal, och $f(x, y) = 1$ annars. Notera att $m_i = 0$ och $M_i \geq 1$ för alla fall. Detta medför att $\Sigma_{i=1}^n M_i \cdot (\text{arean av} D_i) - \Sigma_{i=1}^n m_i \cdot (\text{arean av} D_i) \geq 1$ och volumen är inte definierad i fallet.

Existens:

Sats: (se även sats 3 sida 237 oc sats 4 sida 4 sida 246) Om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på ett kompakt område D av typen $D = \{a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ eller $D = \{q(y) \leq x \leq p(y), c \leq y \leq d\}$, där a, b, c, d, är konstanter och ϕ, ψ, q, p kontinuerliga funktioner, så existerar $\int\int_D f(x, y)dxdy$.

Egenskaper:

Analogt med en-variabel analys (se mer på sida sida 234). Till ex.:

1) $\int\int(\lambda f(x, y) + \mu g(x, y))dxdy = \lambda \int\int f(x, y)dxdy + \mu \int\int g(x, y)dxdy$;

2) $\int\int_{D_1 \cup D_2} f(x, y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x, y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x, y)dxdy$ om Int $(D_1 \cap D_2) = \emptyset$.

Beräckning:

Betrakta $f(x, y)$ som är kontinuerlig på området $D = \{a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, där funktionerna $\phi(x), \psi(x)$ är kontinuerliga, och låt $f \geq 0$ (vi kallar vidare $\psi(x)$ som en överfunktion och $\phi(x)$ som en underfunktion ovanför $[a, b]$ för D.)

Enligt satsen existerar dubbelintegralen $\int\int_D f(x, y)dxdy$ och denna är volymen V av den kropp som ligger mellan D i $x, y-$planet och funktionsytan $z = f(x, y)$ ovanför D.

Från en-variabel analys vet vi att $V = \int_a^b A(x)dx$, där $A(x) =$ *arean* av ett plant snitt genom kroppen vinkelrätt mot $x-$axeln och $A(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$.

Så är $\int\int_D f(x, y)dxdy = V = \int_a^b (\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy)dx$ $\quad (*)$ (*en upprepad integral*),
där i HL är x *en yttre variable* och y *en inre variabel*
(se även sats 2 sida 235 samt sats 4 sida 246).
För att beräkna dubbelintegralen $\int\int_D f(x, y)dxdy$ hittar vi först *inre integralen* $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy$ och sedan integrerar denna m a p x: *yttre integrering.*

Analogt, om $D = \{q(y) \leq x \leq p(y), c \leq y \leq d\}$ så är

$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d(\int_{q(y)}^{p(y)} f(x,y)dx)dy \qquad (**)$,
här i HL är y *en yttre variable* och x *en inre variabel*

Ex 2. Beräkna integralen $I = \int\int_D(x+2y)dxdy$, där
$D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$.

Lsg. 1) Rita en bild och beskriv D m h a över- och underfuntioner.
I fallet är $\psi(x) = 2-x$ och $\phi(x) = 0,\ x \in [0,2]$.

2) Använd formel (*):

$$I = \int_0^2(\int_0^{2-x}(x+2y)dy)dx = \int_0^2([xy+y^2]|_0^{2-x})dx$$

$$\int_0^2(x(2-x)+(2-x)^2)dx = \int_0^2(2x-x^2+4-4x+x^2)dx$$

$$\int_0^2(4-2x)dx = (4x-x^2)|_0^2 = 4\cdot 2 - 2^2 = 4.$$

Ex 3. Beräkna integralen $I = \int\int_D xydxdy$, där D är triangeln med hörn i punkterna $O(0,0)$, $A(1,1)$ och $B(2,-1)$.

Lsg. 1) Rita en bild och beskriv D. Observera att sidan OA ligger på den räta linjen $y = x$ eller $x = y$, sidan AB ligger på den räta linjen $y = -2x+3$ eller $x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$, sidan OB ligger på den räta linjen $y = -\frac{1}{2}x$ eller $x = -2y$.
2) Det funkar ej direkt som förut. Vad gör man ?
Dela upp D i två delområden D_1 och D_2 m h a x-axeln. Observera att
$I = \int\int_{D_1} xydxdy + \int\int_{D_2} xydxdy$.
3) Beräkna integralerna $I_1 = \int\int_{D_1} xydxdy$ och $I_2 = \int\int_{D_2} xydxdy$.
Använd formel (**):
$I_1 = \int_0^1(\int_y^{-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}} xydx)dy = \int_0^1(\int_y^{-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}} xdx)ydy$ (Obs att y är en konstant i inre integralen och kan brytas ut) $=$
$\int_0^1(\frac{x^2}{2}|_y^{-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}})ydy) = \frac{1}{2}\int_0^1((-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2})^2 - y^2)ydy = \frac{1}{8}\int_0^1((y-3)^2 - 4y^2)ydy =$
$\frac{1}{8}\int_0^1(-3y^2-6y+9)ydy = \frac{1}{8}\int_0^1(-3y^3-6y^2+9y)dy = \frac{1}{8}(-\frac{3}{4}y^4 - 2y^3 + \frac{9}{2}y^2)|_0^1 =$
$\frac{1}{8}(-\frac{3}{4} - 2 + \frac{9}{2}) = \frac{7}{32}$.
Analogt, $I_2 = \int_{-1}^0(\int_{-2y}^{-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}} xydx)dy$ (fortsätt själv).

Ex 4. Beräkna integralen $I = \int_0^1(\int_x^1 \exp(-y^2)dy)dx$,

Obs att det inte går att skriva ner *en primitiv* till $\exp(-y^2)$ i enkla funktioner. Detta betyder att vi inte kan utföra den inre integreringen.

Hur löser man då problemet? Svar: *en omkastning av variabler:*

1) Rita en bild: Obs $\psi(x) = 1$ är en överfunktion och $\phi(x) = x$ en underfunktion för integrations område D m a p intervallet $[0,1]$ på $x-$axeln.

Enligt formel (*) har vi $I = \int\int_D \exp(-y^2)dxdy$.

Lägg märke till att $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$. Detta medför att $p(y) = y$ är en överfunktion och $q(y) = 0$ en underfunktion för D m a p intervallet $[0,1]$ på $y-$axeln.

Enligt formel (**) får vi att

$$I = \int_0^1 (\int_0^y \exp(-y^2)dx)dy = \int_0^1 \exp(-y^2)(\int_0^y dx)dy = \int_0^1 y\exp(-y^2)dy$$

$$= |t = -y^2, dt = -2ydy, ydy = -\frac{dt}{2}| = \int_{y=0}^{y=1} -\frac{\exp(t)}{2}dt = [-\frac{\exp(t)}{2}]_{y=0}^{y=1}$$

$$= -\frac{\exp(-y^2)}{2}|_0^1 = -\frac{1}{2}(\exp(-1) - 1).$$