Fö 9:

October 4, 2023

Funktionalmatriser och funktionaldeterminanter

• Låt $f : D \subseteq R^n \to R^m$ vara en avbildning definierad på en öppen delmängd D till R^n och $P \in D$. Observera att $f = (f_1, \ldots, f_m)$, där $f_i : D \subseteq R^n \to R$ för varje i.

Anta att alla $f_i \in C^1(D)$ (kort, $f \in C^1(D)$).

Matrisen $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$ är *en funktionalmatris* för f i P

(se sida 129).

Låt oss beteckna denna med $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(P)$.

Ex 1. Betrakta funktionen $f : R^3 \to R^2$ definierad av $\begin{cases} y_1 = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ y_2 = 2x_1 - 5x_2 + x_3 \end{cases}$.

Notera att f är en linjär avbildning med avbildningsmatrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ och $\frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}(P) = A$ i vilken punkt P som helst.

Om $m = 1$ så är funktionalmatrisen en radmatris (gradienten av f_1 i punkten P).

Om $m = n$ så är funktionalmatrisen kvadratisk. Dess determinant kallas *en funktionaldeterminant* för f i P och denna betecknas $\frac{d(f_1,\ldots,f_n)}{d(x_1,\ldots,x_n)}(P)$ (se sida 140)

Ex 2. (Polära koordinater.)

Betrakta avbildningen $f : D \subseteq R^2_{r,\phi} \to R^2_{x,y}$ s. a.

$x(r,\phi) = r\cdot\cos(\phi),\ y(r,\phi) = r\cdot\sin(\phi)$ och $D = \{r > 0, \phi\in R\}$.

Funktionalmatrisen for avbildningen i punkten (r,ϕ) är

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\cdot\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cdot\cos(\phi) \end{pmatrix}$ och

funktionaldeterminanten i punkten (r,ϕ) är

$\frac{d(x,y)}{d(r,\phi)} = \det\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -r\cdot\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & r\cdot\cos(\phi) \end{pmatrix} = r\cdot\cos^2(\phi) + r\cdot\sin^2(\phi) = r.$

- *Extra uppgift A.* (Sfäriska koordinater.)

Betrakta avbildningen: $x(r,\phi,\psi) = r\cdot\cos(\phi)\cdot\sin(\psi), y(r,\phi,\psi) = r\cdot\sin(\phi)\cdot\sin(\psi)$, $z(r,\phi,\psi) = r\cdot\cos(\psi), r > 0, \phi\in R, \psi\in[0,\pi]$. Observera att $x^2+y^2+z^2 = r^2$.

Finn sedan funktionalmatrisen och funktionaldeterminanten för avbildningen (den sista är lika med $-r^2\cdot sin\psi$).

Sats Om $\frac{d(f_1,\ldots,f_n)}{d(x_1,\ldots,x_n)}(P) \neq 0$ så är f lokalt inverterbar nära P d v s det finns öppna mängder $D_1, D_2 \subseteq R^n$ och en funktion $f^{-1} : D_2 \subseteq R^n \to R^n$ s. a. $P\in D_1\subseteq D$, $D_2 = f(D_1)$, $f^{-1}(D_2) = D_1$, $f\circ f^{-1}(\overline{y}) = \overline{y}$ för varje $\overline{y}\in D_2$ och $f^{-1}\circ f(\overline{x}) = \overline{x}$ för varje $\overline{x}\in D_1$. Dessutom, $f^{-1}\in C^1(D_2)$.

Ex 3. Låt $f : R^n \to R^n$ vara en linjär avbildning med avbildningsmatrisen A d v s $f(x_1,\ldots,x_n) = A\cdot(x_1,\ldots,x_n)^t$ och $\det A \neq 0$.

Observera att A är funktionalmatrisen för f och $\det A$ är funktionaldeterminanten för f. Lägg märke till att avbildningen är globalt inverterbar och inversen f^{-1} är en linjär avbildning med avbildningsmatrisen A^{-1} d v s $f^{-1}(y_1,\ldots,y_n) = A^{-1}\cdot(y_1,\ldots,y_n)^t$.

Variabelbyte i dubbelintegraler

- *Ett variabelbyte* är en injektiv funktion $f : D\subseteq R^2 \to R^2$ s. a. f och dess invers $f^{-1} : D_1 = f(D)\subseteq R^2\to R^2$ är C^1-avbildningar.

Sats: Låt $I = \int\int_{D_{xy}} g(x,y)dxdy$ och $f : x = x(u,v), y = y(u,v),\ (u,v)\in D_{uv}$ vara ett variabelbyte s .a. $f(D_{uv}) = D_{xy}$ och $f^{-1} : u = u(x,y), v = v(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}$. Då är

$$I = \int\int_{D_{uv}} g(x(u,v),y(u,v))\cdot|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}|\ dudv \qquad (\#)$$

(se även sats 6 sida 261.)

Lägg märke till BELOPPET i formeln.

- En användbar formel:

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}}.$$

Ex 4. Beräkna integralen $I = \int\int_{D_{xy}} x dx dy$, där $D = \{(x,y) : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lsg. Använd polära koordinater: $f : x = r \cdot \cos\phi,\ y = r \cdot \sin\phi$.

Svara på tre frågor innan du tar upp HL av formeln (#):
1) Vad är$D_{r\phi}$?
Observera att f avbildar $D_{r\phi} = \{(r,\phi) : 0 \leq r \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$ på D_{xy}.
2) Vad är $|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}|$?

Repetera att $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = r$. Så är $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = r$

3) Vad är $g(x(r,\phi), y(r,\phi))$?
Ty $g(x,y) = x$ i fallet får vi $g(x(r,\phi), y(r,\phi)) = r \cdot \cos(\phi)$.
Enligt formel (#) har vi att

$$I = \int\int_{D_{r\phi}} (r \cdot \cos\phi) \cdot r dr d\phi = \int_0^1 (\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos\phi \ d\phi) dr$$
$$= \int_0^1 r^2 \cdot \sin\phi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr = 2\int_0^1 r^2 dr = \frac{2}{3}.$$

Ex 5. Beräkna integralen $I = \int\int_{D_{xy}} xy dx dy$, där D_{xy} är triangeln med hörn i punkterna (0.0), $(1,1)$ och $(2,-1)$ (Fö 8).

Lsg. Använd variabelbytet: $\begin{cases} x = u + 2v \\ y = u - v \end{cases}$, en linjär avbildning med avbildningsmatrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Notera att $\det A = -3 \neq 0$. Repetera Ex 3. Så är $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = -3$.

Observera att D_{uv} är triangeln med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$ och $(0,1)$.
Så är $I = \int\int_{D_{uv}} (u+2v)(u-v) 3 du dv = 3\int_0^1 (\int_0^{1-u} (u^2 + uv - 2v^2) dv) du =$
$3\int_0^1 (u^2(1-u) + \frac{1}{2}u(1-u)^2 - \frac{2}{3}(1-u)^3) du$.
Avsluta själva exemplet.

Några tillämpningar.

Ex 6. Beräkna arean av området $D_{x,y} = \{-1 \leq 2x + 3y \leq 4, 2 \leq 3x - 4y \leq 5\}$.
Lösning. Repetera att arean $A = \int\int_{D_{x,y}} 1 \ dx dy$ (kort, $\int\int_{D_{x,y}} dx dy$).

Använd variabelsubstitutionen $f : u = 2x + 3y, v = 3x - 4y$.

Observera att $D_{u,v} = \{-1 \leq u \leq 4, 2 \leq v \leq 5\}$,

$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{17}, \quad |\frac{d(x,y)}{d(u,v)}| = \frac{1}{17}$ och

$g(x(u,v), y(u,v)) = 1$.

Vi får $I = \int\int_{D_{u,v}} 1 \cdot \frac{1}{17} dudv = \frac{1}{17} \cdot \int\int_{D_{u,v}} 1 dudv =$

| Obs $\int\int_{D_{u,v}} 1dudv$ är arean av rektangeln $D_{u,v}| =$

$\frac{1}{17} \cdot (4 - (-1)) \cdot (5 - 2) = \frac{15}{17}$.

Ex 7. Beräkna volumen V av en tekopp av formen $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$.

Lösning. Rita en bild. Observera två ytor: $z = 1$ och $z = x^2 + y^2$ ovanför cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$ som avgränsar volymen. Man får att $V = \int\int_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - (x^2 + y^2))dxdy$.

Använd polära koordinater. $V = \int_0^{2\pi} (\int_0^1 (1 - r^2)r)dr = 2\pi(\int_0^1 (r - r^3)dr) =$
$\frac{1}{2}\pi$.