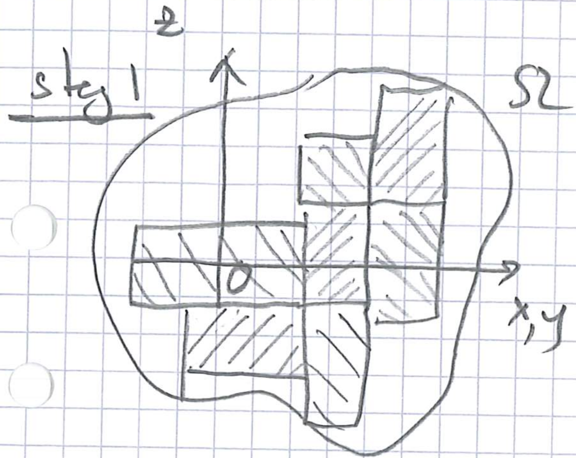
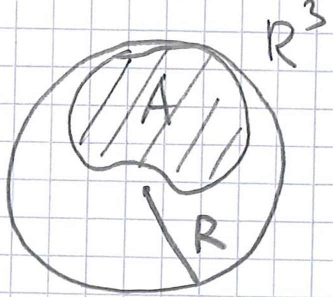
Antag att $f(x,y,z)$ är integrerbar på Ω.

d v s. $I = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ existerar.



$\Omega_1^{(1)}, \Omega_2^{(1)}, \dots \Omega_{n_1}^{(1)}$ är delområde med diametern av $\Omega_i^{(1)} < 1 \quad \forall i$



diam A = diameter av den minsta sfären som kan omsluta A.

$\forall i$ Välj $P_i^{(1)} \in \Omega_i^{(1)}$ o bilda

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n_1} f(P_i^{(1)}) \cdot \text{volymen av } \Omega_i^{(1)}$$

Fortsätt analogt

Steg $k \geq 2$: $\Omega_1^{(k)}, \Omega_2^{(k)}, \dots \Omega_{n_k}^{(k)}$ s.a. diam $\Omega_i^{(k)} < \frac{1}{k}$

$\forall i$ välj $P_i^{(k)} \in \Omega_i^{(k)}$ o bilda

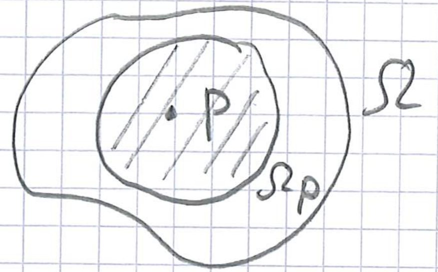
Summan $I_k = \sum_{i=1}^{n_k} f(P_i^{(k)}) \cdot$ volymen av $\Omega_i^{(k)}$

<u>Obs</u> Om $f = 1$ på Ω så är

$$I_k = \sum_{i=1}^{n_k} \text{volymen av } \Omega_i^{(k)} = \text{volymen av } \Omega.$$

$$\Rightarrow I = \text{volymen av } \Omega.$$

<u>Densitet av Ω i P</u>:

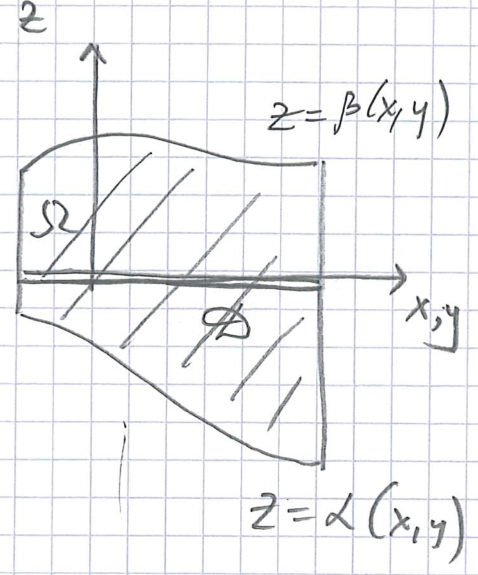


$$d(P) = \lim_{\text{diam}\,\Omega_P \to 0} \frac{\text{massan av } \Omega_P}{\text{volymen } \Omega_P}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{massan av } \Omega} = \iiint_\Omega d(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Itererad integration

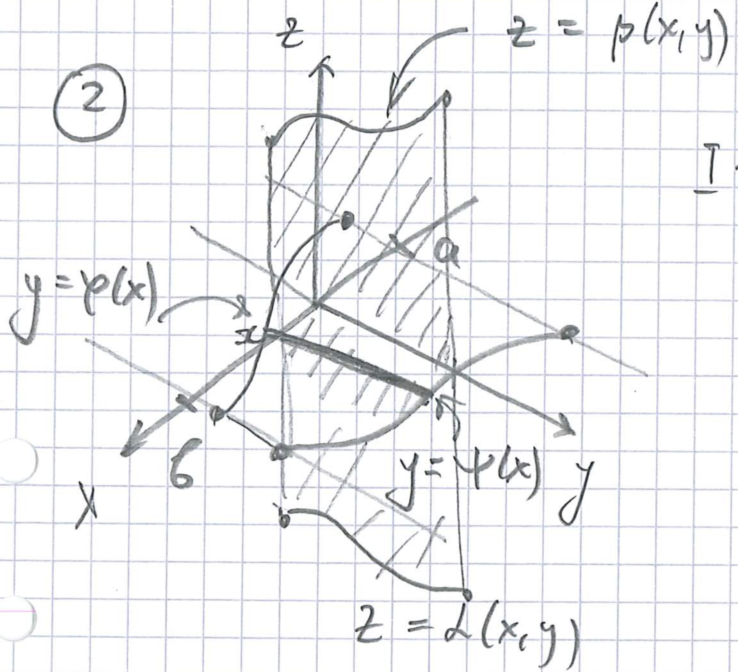
1



$$\Omega = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D \text{ o } \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y) \}$$

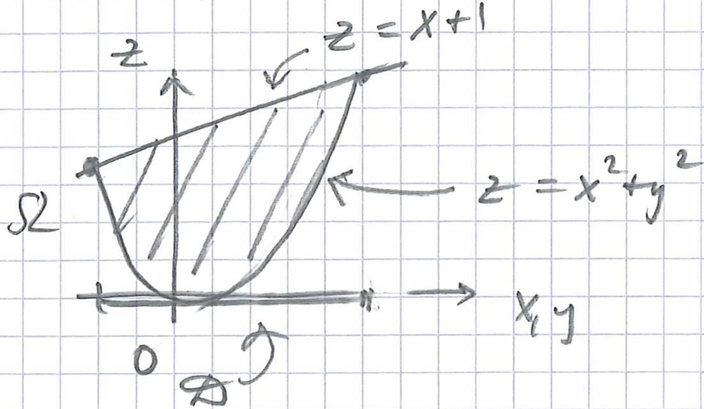
$$I = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

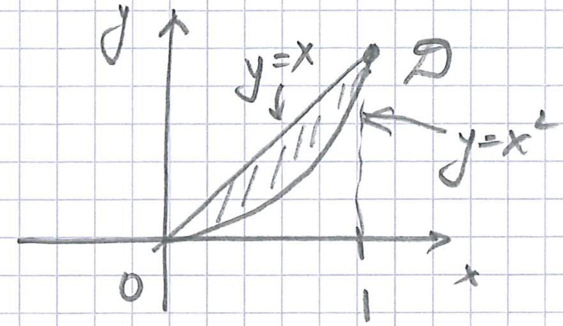
2



$$I = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

Ex1. Finn volymen V av den kropp Ω som ligger mellan ytorna $z = x+1$, $z = x^2+y^2$ ovanför $D = \{ 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x \}$.





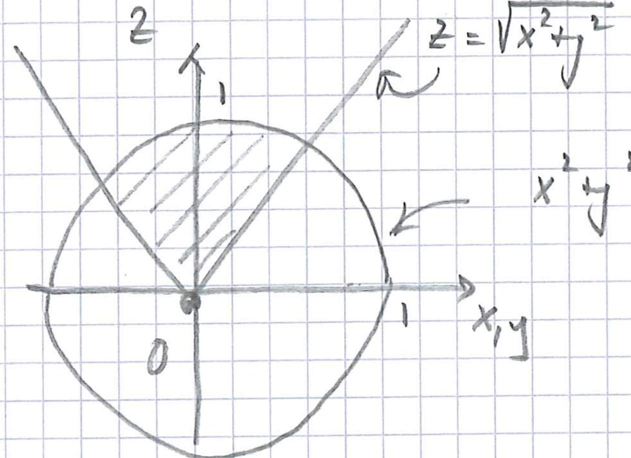
Obs $x+1 > x^2+y^2 \quad \forall (x,y) \in D$
(realistiskt)

$$\Rightarrow V = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{x+1} 1 \, dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left((x+1) - (x^2+y^2) \right) dx\,dy \quad \text{(dubbelintegral)}$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (x+1-x^2-y^2)\,dy \right) dx = \ldots = \frac{201}{1260}$$

Ex 2 Beräkna massan M av den kropp Ω inom klotet $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ o ovanför konen $z=\sqrt{x^2+y^2}$ med densitet $f(x,y,z) = z+1$.



$\Rightarrow$ Ω är instängd mellan ytorna:

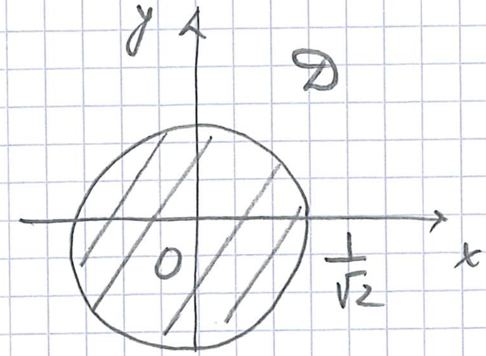
$z=\sqrt{x^2+y^2}$ o $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\Rightarrow M = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z+1 \, dz \right) dx\,dy$$

där

$$D: \Bigg/ \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

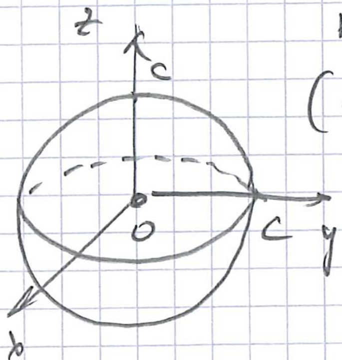
$\Rightarrow$ $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$ är cirkeln som omsluter D.



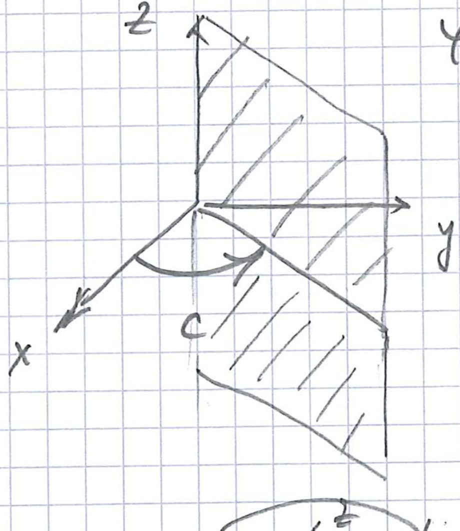
$$\Rightarrow M = \iint_{D} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2} \right) dxdy = \ldots = ?$$

Extra uppgift A:

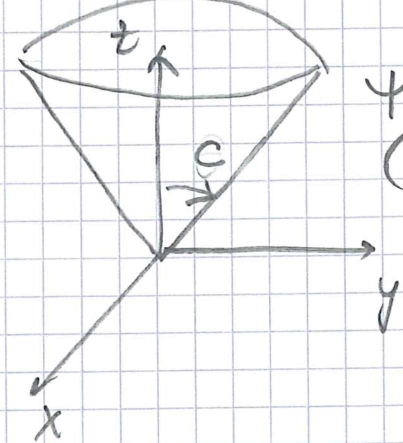
(1) Vilka mängder i x,y,z rummet beskriver ekvationerna:



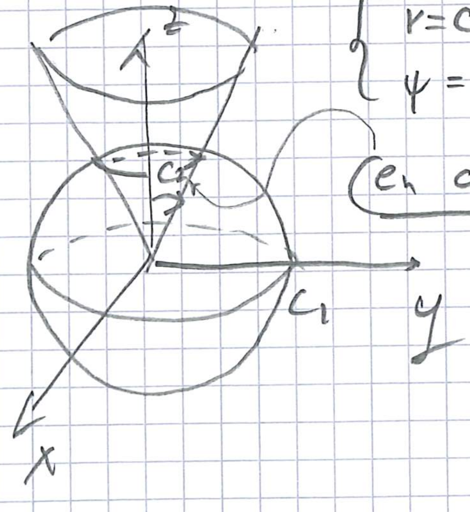
$r = c > 0$
(en sfär)



$\varphi = c$
(ett halvplan)

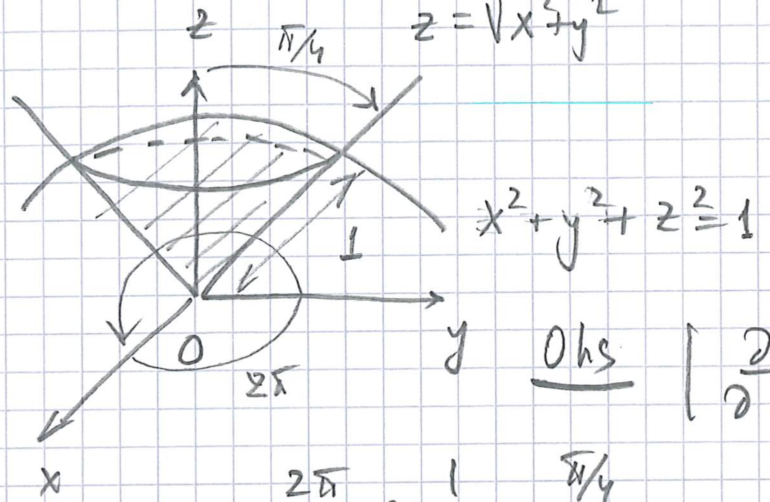


$\psi = c$
(en kon)



$\begin{cases} r = c_1 \\ \psi = c_2 \end{cases}$
(en cirkel)

Ex 3



Sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \psi \le \pi/4 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \longrightarrow \Omega_{xyz}$$

Obs $\left|\dfrac{\partial xyz}{\partial r\varphi\psi}\right| = r^2 \sin\psi$

$$\Rightarrow M = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{\pi/4}(r\cos\psi+1)\, r^2 \sin\psi \, d\psi\right) dr\right) d\varphi$$

$$= \ldots = ?$$