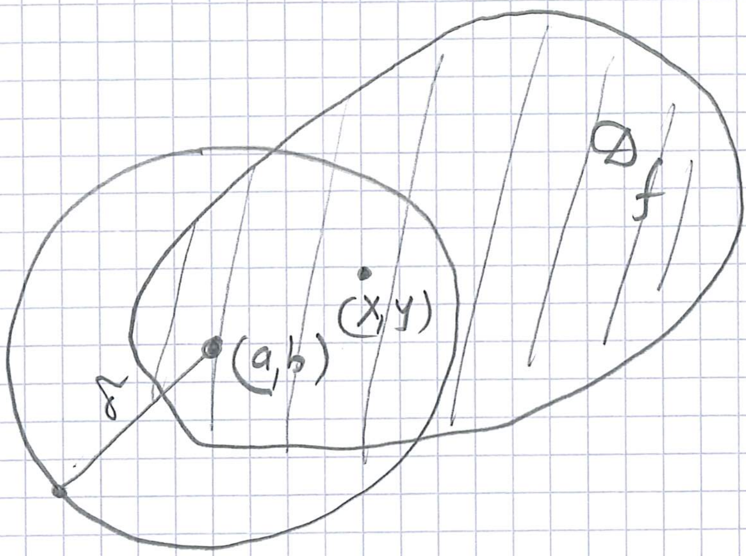


(a,b) är en <u>lok. maximipunkt</u> om

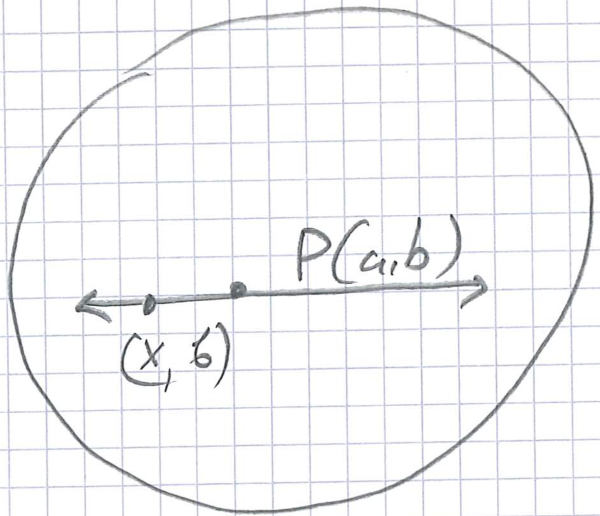
$\exists\, \delta > 0$ s. a. $f(a,b) \geq f(x,y)$

för alla $(x,y) \in \mathcal{D}_f$ med $|(x,y) - (a,b)| < \delta$.

Analogt, en lok. minimipunkt

definieras $\left(f(a,b) \leq f(x,y) \ldots \right)$

Sats: Om f har ett lok. extremvärde i en punkt $P \in \operatorname{Int} D_f$ o f är partiellt deriverbar i P så är $f_x'(P) = 0$ o $f_y'(P) = 0$



Anta att P är lok. maximipunkt.

$$\frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} \geq 0$$ om vänster

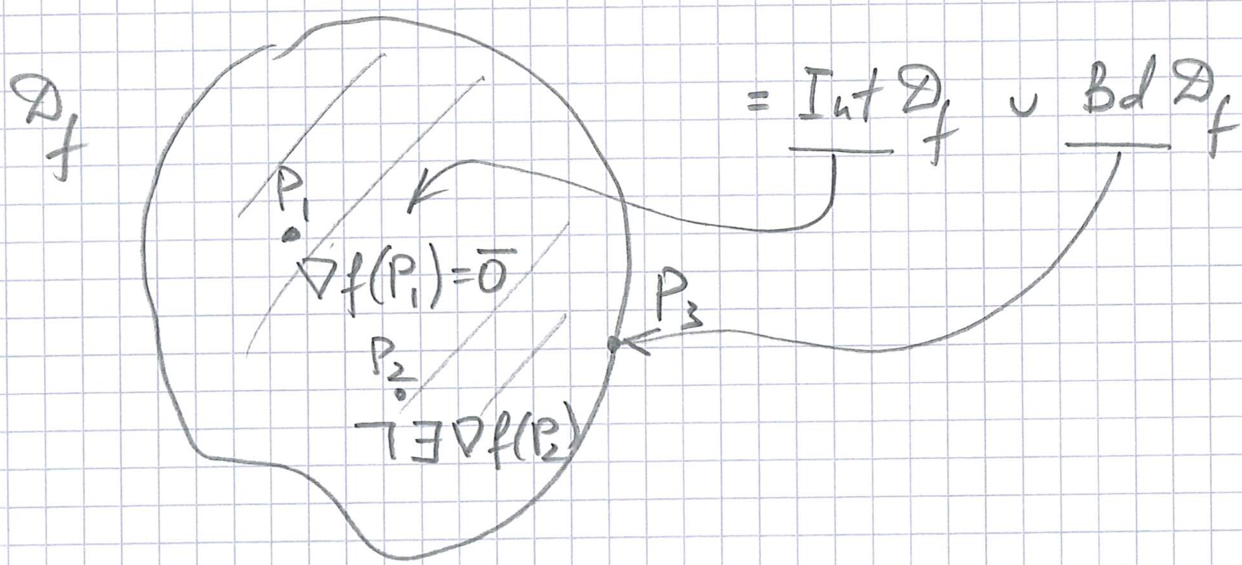
$$\frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} \leq 0$$ om höger

$$\Downarrow$$

$$f_x'(P) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} = 0$$

Analogt, $f_y'(P) = 0$

Uppsökningsschema
(för lok. extrempunkter)



Möjliga kandidater:

1) __inre__ __stationära__ punkter (P_1)

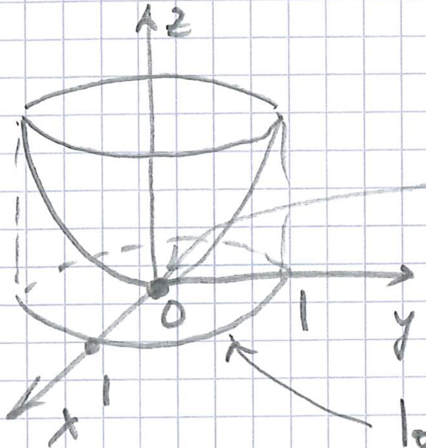
2) __inre__ punkter där ∇f inte existerar (P_2)

3) randpunkter (P_3)

Ex 3

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D_f = \{ x^2+y^2 \leq 1 \}$.

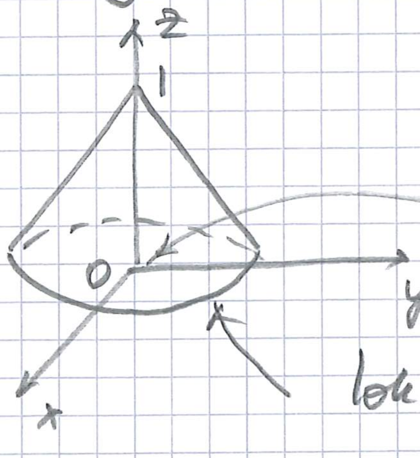
$z = f(x,y)$ (grafen)



lok. minimipunkt.
(en inre punkt till D_f)
$\nabla f = \bar{0}$

lok. maximipunkter
(randpunkter till D_f)

(ii) $g(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, $D_g = \{ x^2+y^2 \leq 1 \}$.



lok. maximipunkt
(en inre punkt till D_g)
∇g existerar ej

lok. minimipunkter
(randpunkter till D_g)

Obs $g_x'(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-|x|)-1}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-|x|}{x}$ finns ej

Ex 10

Bestäm alla lok. extrempunkter till
$f(x,y) = 20 + x^2 + 2y^2 + 4xy - x^4, \ (x,y) \in R^2$

(1) $\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 4x^3 = 0 & (1) \\ 4y + 4x = 0 & (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow 4y = -4x \curvearrowright (1): \quad -2x - 4x^3 = 0$

eller $x(\underbrace{1 + 2x^2}_{\neq 0}) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$

$(0,0)$ är en enda stationär punkt.

(2) $Q(h,k) = 2h^2 + 8hk + 4k^2 =$

$= 2(\underbrace{h^2 + 4hk} + 2k^2) =$

$2((h+2k)^2 - 4k^2 + 2k^2) = \underline{2(h+2k)^2 - 4k^2}$

<u>Obs</u> (i) $Q(1,0) = 2 > 0$
(ii) $Q(2,-1) = -4 < 0$ $\Big| \Rightarrow Q$ är <u>indefinit</u>

$\Rightarrow$ origo är en <u>sadelpunkt</u>.