Ex 1 $\qquad f(x,y) = x^2 - y^2$

Obs $\qquad \lim_{x \to \infty} f(x,0) = \infty$

$\lim_{y \to \infty} f(0,y) = -\infty$

$V_f = (-\infty, +\infty)$

Inga extremvärde finns.

EX 2 $\quad f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}, \quad \underbrace{(x,y) \in R^2}_{= D = Int D}$

Obs 1) f är kontinuerlig

2) D är icke-kompakt

$\Rightarrow$ extremvärde behöver ej existera.

Obs 1) Varje extrempunkt är en lokal extrempunkt. $\in Int D$

2) f är partiellt deriverbar m a p x o y på hela R^2.

1) & 2) $\Rightarrow$ om P är en extrempunkt så är $\nabla f(P) = \bar{0}$.

d v s. stationära punkter är kandidatpunkter.

Obs Vad kan hända:

(i) $V_f = (a, b)$, där $-\infty \le a < b \le \infty$

inga extremvärde

(ii) $V_f = (a, b]$, där $-\infty \le a < b < \infty$

$\exists$ maximivärde $(= b)$ o $\neg\exists$ minimivärde

(iii) $V_f = [a, b)$, där $-\infty < a < b \le \infty$

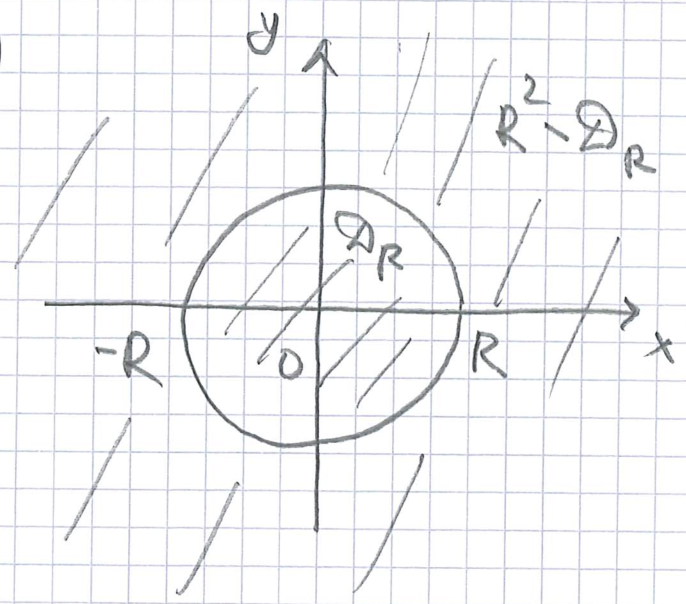
$\exists$ minimivärde $(= a)$ o $\neg\exists$ maximivärde

(iv) $V_f = [a, b]$, där $-\infty < a < b < \infty$

$\exists$ maximivärde $(= b)$ o $\exists$ minivärde $(= a)$

Fråga: Hur ska vi avgöra om kandidatpunkterna är extrempunkter eller ej?

1)



$\mathcal{D}_R = \{x^2+y^2 \le R^2\}$

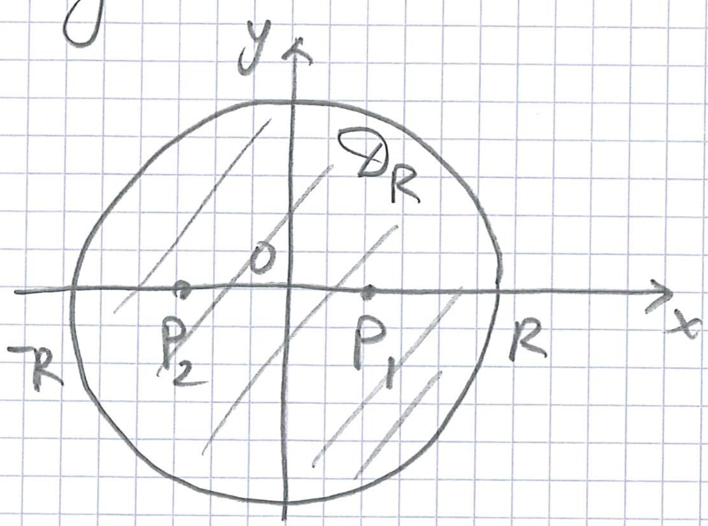
Obs $\mathcal{D}_R$ är kompakt

F. Varför just en cirkelskiva?

Ty x^2+y^2 ingår i f o $\mathcal{D}=\mathbb{R}^2$.

2) $\nabla f = \bar{0} \iff P_1(1,0),\ P_2(-1,0)$

Välj R så stor att $P_1, P_2 \in \operatorname{Int} \mathcal{D}_R$



Undersök f på $Bd\,\mathcal{D}_R$:

$$\left| f|_{Bd\,\mathcal{D}_R} \right| \le \frac{R}{1+R^2}$$

Obs $\quad \frac{R}{1+R^2} \longrightarrow 0 \quad$ då $\quad R \to \infty$

(det betyder: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists R_\varepsilon$ s.a.

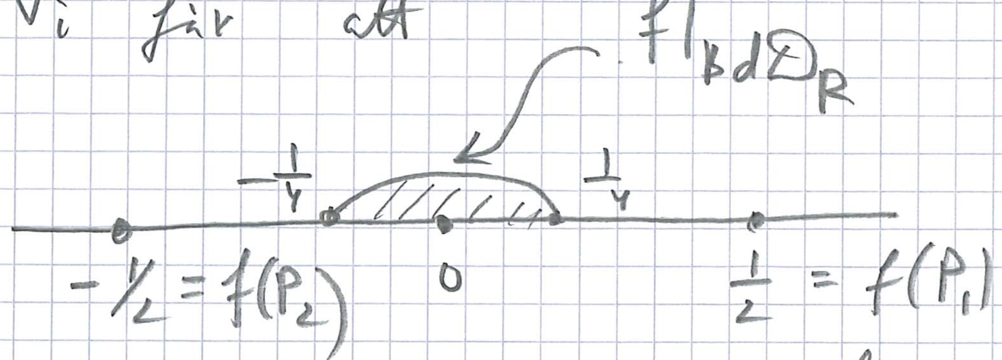
för alla $R \geqslant R_\varepsilon$ vi har $\frac{R}{1+R^2} < \varepsilon$)

Obs $\quad f(P_1) = \frac{1}{2} \quad$ o $\quad f(P_2) = -\frac{1}{2}$

Välj $\quad \varepsilon = \frac{1}{4} \quad$ o $\quad R \geqslant R_{\frac{1}{4}}$

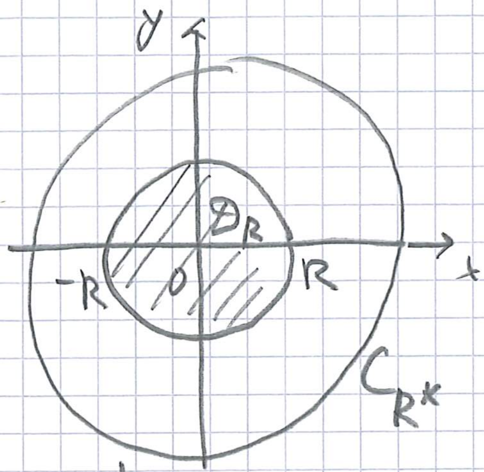
då är $\quad \left| f|_{Bd\,\mathcal{D}_R} \right| < \frac{1}{4}$

Vi får att



$$\Rightarrow \quad \max_{\mathcal{D}_R} f = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \min_{\mathcal{D}_R} f = -\frac{1}{2}$$

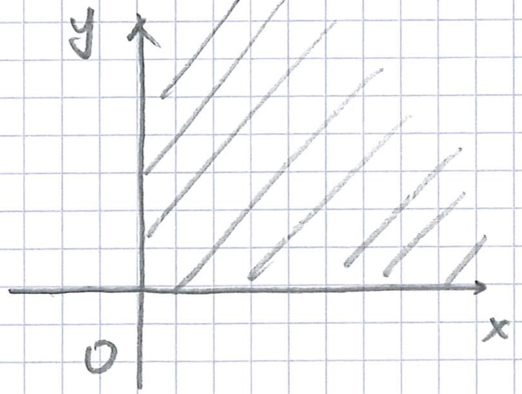
Samma bild gäller för $f|_{C_{R^*}}$



$\Rightarrow$ $\max\limits_{R^2} f = \frac{1}{2}$ o $\min\limits_{R^2} f = -\frac{1}{2}$

o $V_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

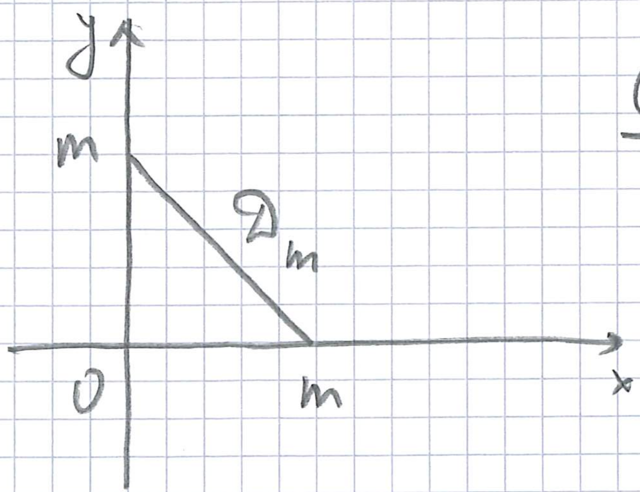
Ex3 $f(x,y) = \dfrac{xy}{4+(x+y)}$, $D = \{x, y \geq 0\}$



Obs f är kontinuerlig

D är icke-kompakt.

F. Vad kan man göra?



Obs 1) $D = \bigcup\limits_{m \geq 0} D_m$

2) D_m är kompakt för alla $m \geq 0$.

Betrakta $f|_{D_m} = g_m(x), \quad x \in [0, m]$

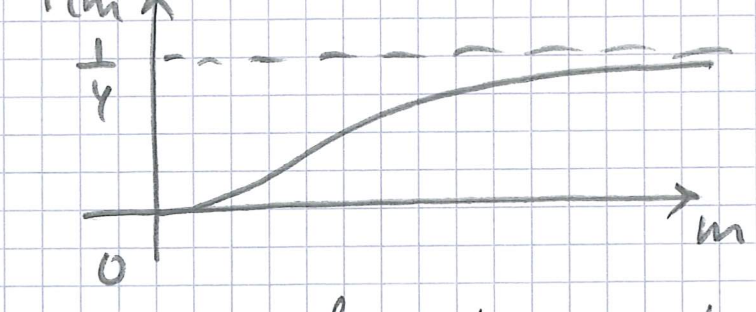
$$\underset{\substack{\parallel \\ \psi(m)}}{\min g(m) = 0} \quad \text{o} \quad \max g(m) = \underset{\substack{\parallel \\ \varphi(m)}}{\frac{m^2}{4(4+m^2)}}$$

Obs $\max f = \max \varphi$ o $\min f = \min \psi$

(VL o HL existerar eller icke existerar samtidigt)

Obs $\min f = 0$ antas på x, y-positiva axlarna.

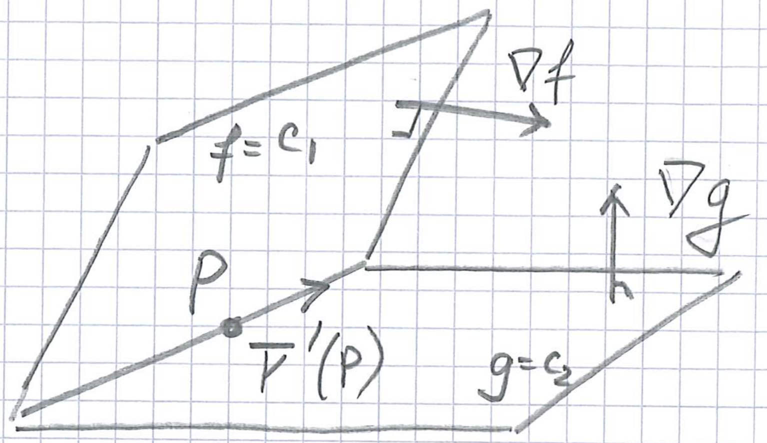
Studera $\varphi(m) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{4}{4+m^2}\right)$



$\Rightarrow$ $\varphi(m)$ saknar största värde

$\Rightarrow$ f saknar största värde o

$$V_f = [0, \tfrac{1}{4})$$



<u>Obs</u> $\bar{r}'(P) \perp \nabla f(P), \nabla g(P)$

$\Rightarrow \bar{r}'(P) \parallel \nabla f(P) \times \nabla g(P)$