Problem: Sök extremvärde av $f(x,y)$

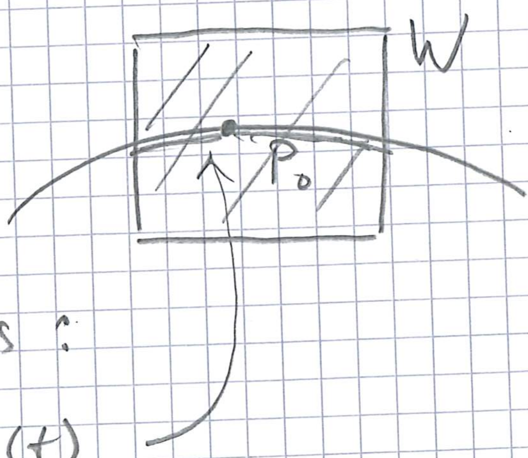
då (x,y) satisfierar $g(x,y)=c$

(ett bivillkor)

till ex.

$$\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)} = \underbrace{1}_{c}$$

Låt $P_0 \in \{g(x,y)=c\}$ o $\nabla g(P_0) \neq 0$.



Då existerar W s.a.

mängden $W \cap \{g(x,y)=c\}$

kan parameterframställas:

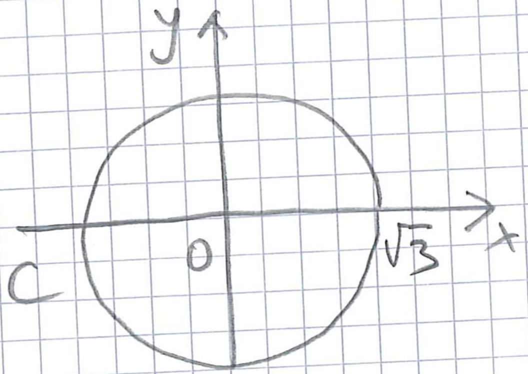
$$\exists\ \bar{r}(t): \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad t \in (a,b) \ni 0$$

o $\bar{r}(0) = P_0$.

Bl.a. $\nabla g(P_0) \perp \bar{r}'(0)$

Ex 1 Optimera $f(x,y) = 6 + x^2 - 3y^2 - 3\ln(1+x^2+y^2)$

på cirkeln C : $\underbrace{x^2+y^2}_{g(x,y)} = \underbrace{3}_{c} = (\sqrt{3})^2$



Obs 1) C är kompakt

2) f är kontinuerlig

$\Rightarrow f|_C$ har extremvärde.

Kandidatjakt:

$$(*) \begin{cases} \nabla f \parallel \nabla g \\ g = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xy = 0 \\ x^2+y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(-\sqrt{3},0),\ P_2(\sqrt{3},0),\ P_3(0,-\sqrt{3}),\ P_4(0,\sqrt{3})$$

$$f(0,\pm\sqrt{3}) = -3 - 3\ln 4 = \min_C f$$

$$f(\pm\sqrt{3},0) = 9 - 3\ln 4 = \max_C f$$

Andra sättet:

$$(*) \iff \begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = 3 \end{cases}$$

(λ är Lagranges multiplikator)

$$\iff \begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ g(x,y) = 3 \end{cases}$$

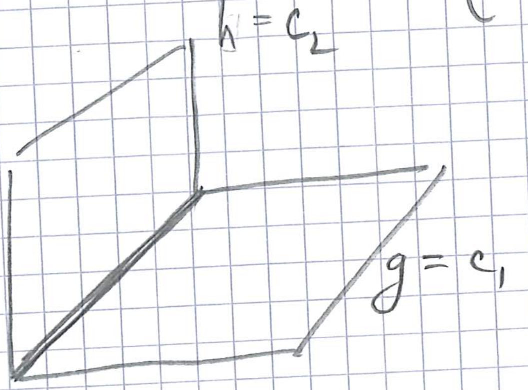
Obs I fall $f(x,y,z)$ o $g(x,y,z)$

använd Lagranges multiplikator.

$$\begin{cases} \nabla f \parallel \nabla g \\ g(x,y,z) = c \end{cases} \iff \begin{cases} \nabla f = \lambda \cdot \nabla g \\ g = c \end{cases}$$

Problem 2: Optimera $f(x,y,z)$ då (x,y,z) satisfierar $g(x,y,z) = c_1$ o $h(x,y,z) = c_2$

(två bivillkor)



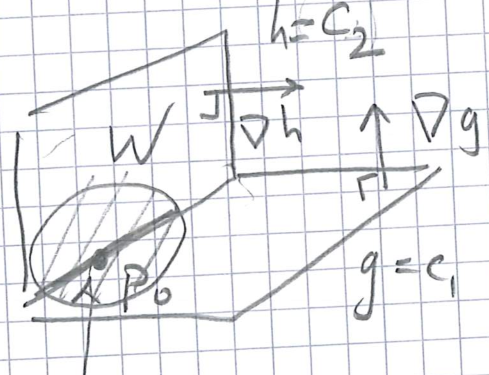
Till ex:

$$\begin{cases} \overbrace{x^2+y^2+z^2}^{g} = \overbrace{1}^{c_1} \\ \underbrace{x+y+z}_{h} = \overbrace{1}^{c_2} \end{cases}$$

Antag att $P_0 \in \{g=c_1, h=c_2\}$ o

$\nabla g(P_0) \times \nabla h(P_0) \neq \bar{0}$. Då

existerar W s.a.



$W \cap \{g=c_1, h=c_2)$ kan

parameterframställas:

$$\exists\ \bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in (a,b) \ni 0$$

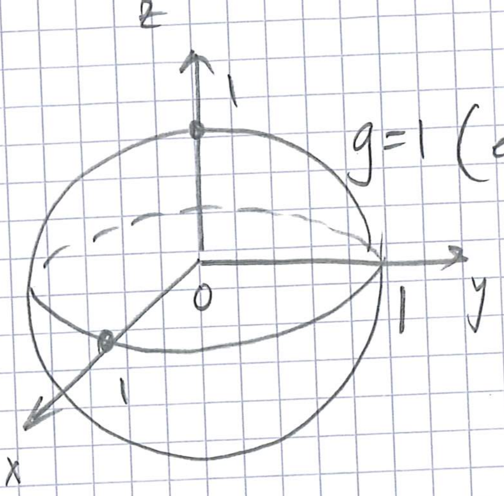
o $\bar{r}(0) = P_0$.

$\Rightarrow$ $\nabla g(P_0), \nabla h(P_0) \perp \bar{r}'(0)$

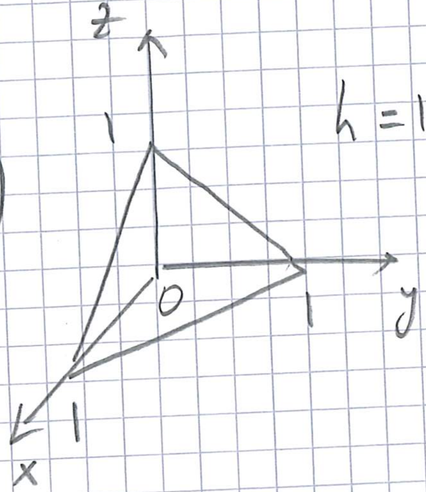
Ex 2. Optimera $f(x,y,z) = 3x + 2y + z$ då

$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g} = 1$ o $\underbrace{x+y+z}_{h} = 1$

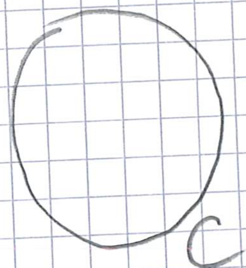
två tivillkor



g=1 (en sfär)



h=1 (ett plan)

$\{g=1, h=1\}$ =  (en cirkel) i rummet.

Obs 1) C är kompakt ⇒
2) f är kontinuerlig

$f\big|_C$ har extremvärde

Kandidatjakt:

$$(*)\begin{cases} \nabla f, \nabla g, \nabla h \text{ är linjärt beroende} \\ g = 1 \\ h = 1 \end{cases}$$

$$(*) \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = 0 \\ g = 1, \quad h = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} -2x + 4y - 2z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (2) \\ x + y + z = 1 & (3) \end{cases}$$

betrakta först o uttrycka två variabler i tredje.

Sedan sätt in uttrycken i (2) ,, o s v

$$\Rightarrow \quad A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{3}\right), \quad B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$f(A) = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = \max_C f$$

$$f(B) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \min_C f$$

Problem med ostränga olikheter.

till ex. optimera $f(x,y,z)$ då (x,y,z)

satisfierar $g(x,y,z) \leq c_1$ o $h(x,y,z) \leq c_2$

① $\begin{cases} g < c_1 \\ h < c_2 \end{cases}$	$\begin{cases} g = c_1 \\ h < c_2 \end{cases}$ ②
③ $\begin{cases} g < c_1 \\ h = c_2 \end{cases}$	$\begin{cases} g = c_1 \\ h = c_2 \end{cases}$ ④

Kanditatjakt:

① $\begin{cases} \nabla f = \bar{0} \\ g < c_1, \quad h < c_2 \end{cases}$

② $\begin{cases} \nabla f, \nabla g \text{ är lin. ber.} \\ g = c_1, \quad h < c_2 \end{cases}$

③ $\begin{cases} \nabla f, \nabla h \text{ är lin. ber.} \\ g < c_1 \\ h = c_2 \end{cases}$

④ $\begin{cases} \nabla f, \nabla g, \nabla h \text{ är lin. ber.} \\ g = c_1, \quad h = c_2 \end{cases}$