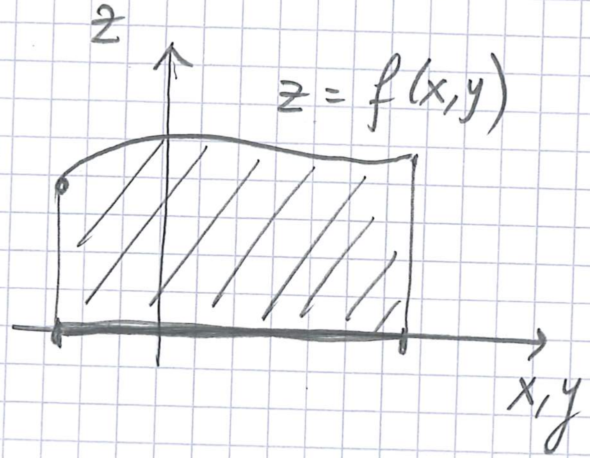
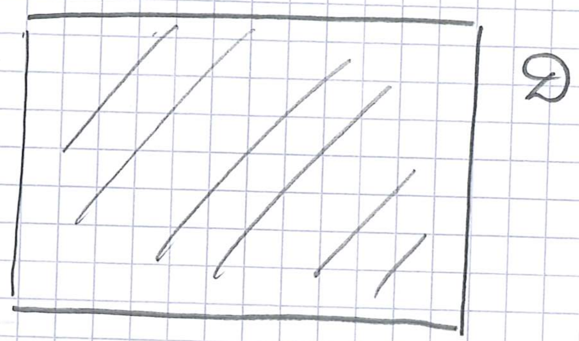
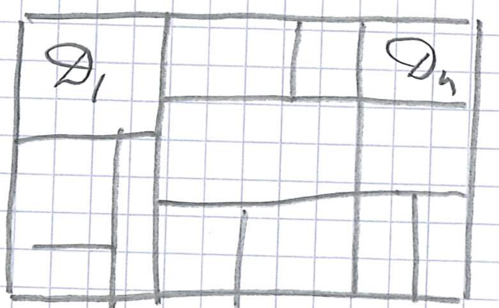
Problem: Vad är volymen V av den kropp som ligger mellan ett område $\mathcal{D}$ (en rektangel) i x,y-planet o $z=f(x,y)$ ovanför $\mathcal{D}$?





Uppdelning av $\mathcal{D}$ i **små delområden** $\mathcal{D}_i$



$\forall \mathcal{D}_i$ välj tal **m_i, M_i**

s.a.

$$m_i \leq f(x,y) \leq M_i$$

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_i$$

Trappfunktioner:

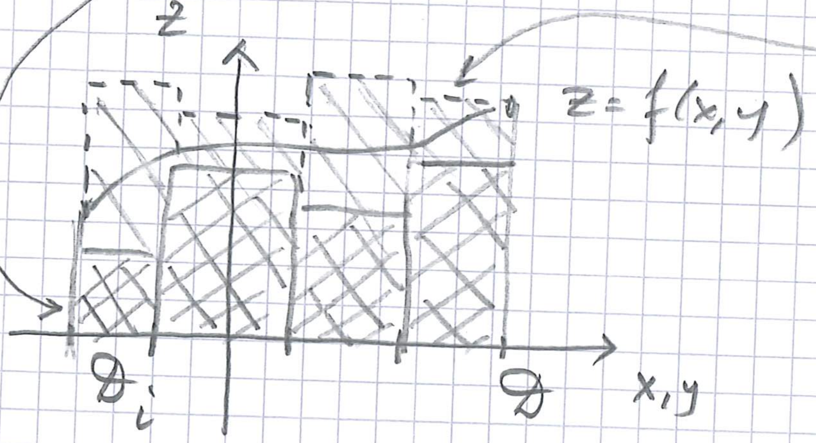
$h(x,y) = \{ M_i : (x,y) \in \mathcal{D}_i \} : \mathcal{D} \to R$ **övertrappa**

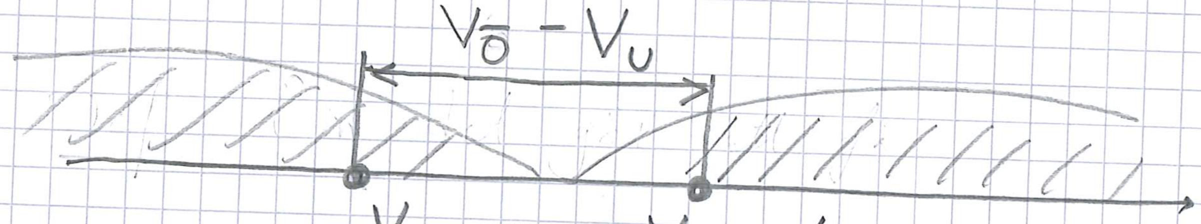
$g(x,y) = \{ m_i : (x,y) \in \mathcal{D}_i \} : \mathcal{D} \to R$ **undertrappa**

Obs • $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{D}$

(#) • $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (\text{arean av } \mathcal{D}_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (\text{arean av } \mathcal{D}_i)$

(volymen av underkroppen) (V. av överkropp)





volymer för underkroppar

$V_{\bar{O}}$ volymer för överkroppar

Def. Om det går att få skillnaden $V_{\bar{O}} - V_U$ godtyckligt liten säger vi att volymen V är det entydigt bestämt tal som uppfyller (#) för varje indelning av $\mathcal{D}$ o varje urval av m_i o M_i.

Existens:

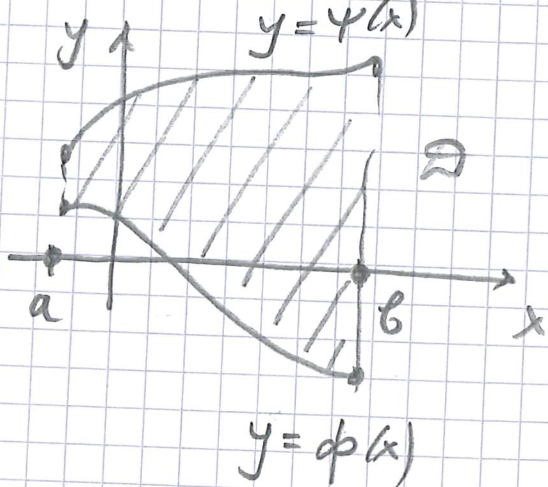
Sats Om $f(x,y)$ är kontinuerlig på ett kompakt område D av typen

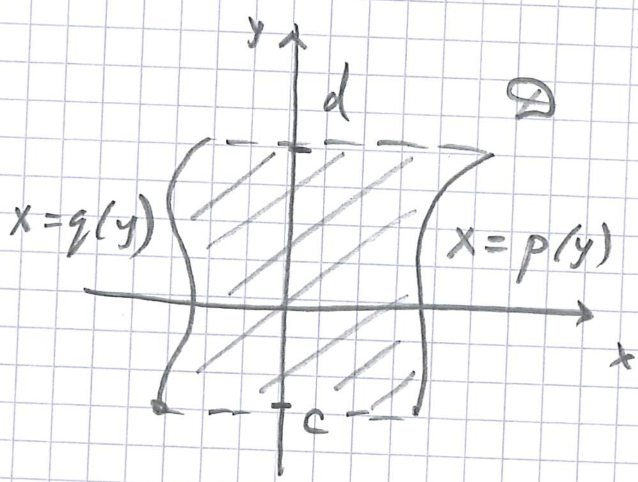
$$D = \{ a \le x \le b,\ \phi(x) \le y \le \psi(x) \}$$ eller

$$D = \{ q(y) \le x \le p(y),\ c \le y \le d \},$$ där

a, b, c, d är tal o ϕ, ψ, q, p är kontinuerliga funktioner så existerar

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$





Beräkning:

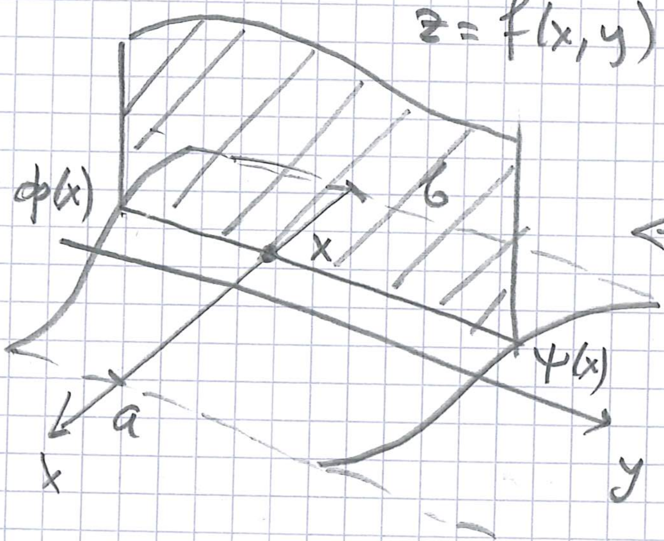
Anta att $f(x,y)$ är kontinuerlig på

$$\mathcal{D} = \{ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \}.$$

a, b är tal; φ, ψ är kontin. funktioner

o $f \geqslant 0$

$\Rightarrow \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$ existerar o den $= V$. (1)



Plant snitt genom kroppen vinkelrät mot x-axeln

Detta har arean

$$A(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy.$$

En variabel analys $\Rightarrow$ $V = \int_a^b A(x)\,dx$ (2)

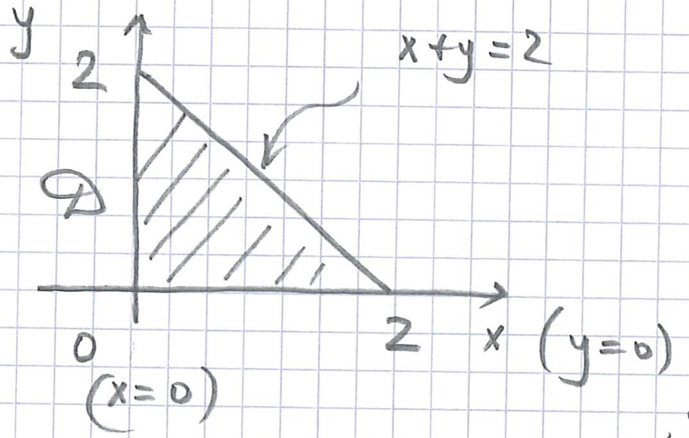
(1) & (2) $\Rightarrow$ $\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$

Ex 2

$$I = \iint_{D} (x+2y)\,dx\,dy$$

där $D = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 2\}$.

Rita D!



Obs

$$D = \{\underset{\substack{\| \\ a}}{0} \leq x \leq \underset{\substack{\| \\ b}}{2},\ \underset{\substack{\| \\ \varphi(x)}}{0} \leq y \leq \underset{\substack{\| \\ \psi(x)}}{2-x}\}$$

överfunktion

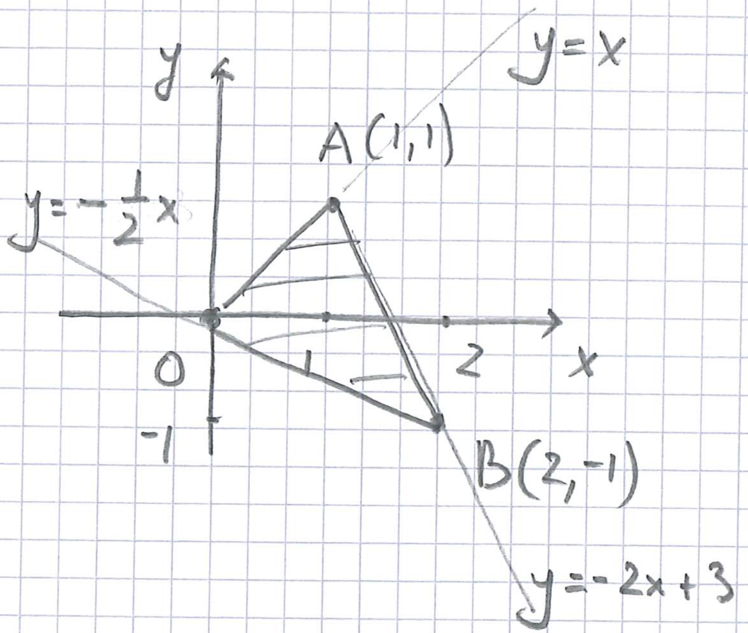
$$\Rightarrow I = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (x+2y)\,dy \right) dx$$

underfunktion

$$= \ldots = \underline{4}.$$

Ex 3. $I = \iint_{\mathcal{D}} xy \, dx\,dy$, där $\mathcal{D}$ är triangeln i hörn $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(2,-1)$

Rita $\mathcal{D}$!

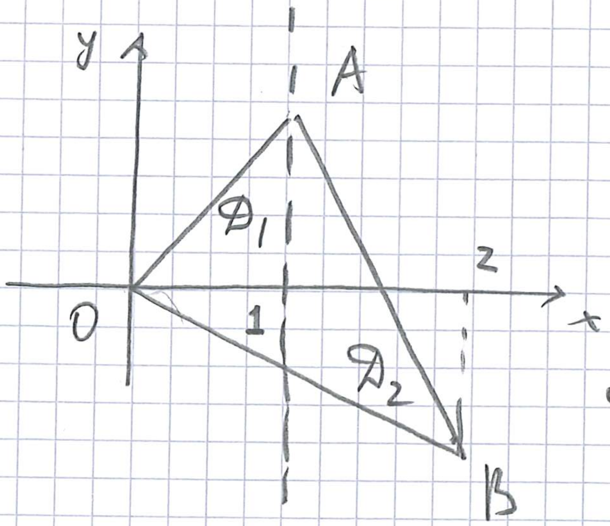


Obs

- **linjerna**

$(y = kx + b)$

Gör uppdelning (eller som i pdf-filen)



Obs

- $I = \underbrace{\iint_{\mathcal{D}_1} f(x,y)\,dx\,dy}_{I_1} + \underbrace{\iint_{\mathcal{D}_2} f\,dx\,dy}_{I_2}$

- $I_1 = \int_0^1 \left(\int_{-\frac{1}{2}x}^{x} xy \, dy \right) dx$

$I_2 = \int_1^2 \left(\int_{-\frac{1}{2}x}^{-2x+3} xy \, dy \right) dx \Rightarrow I = \ldots = ?$

Ex 4.

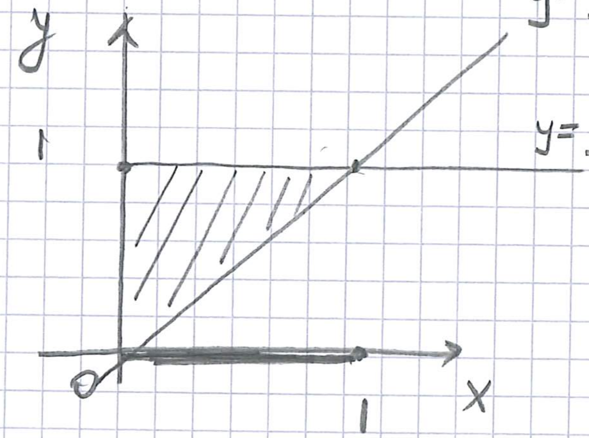
$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{-y^2} \, dy \right) dx$$

Obs • upprepad integral

• men e^{-y^2} saknar en **primitiv** i enkla funktioner

(1) **Rita bild!** o (2) **Kasta om variablerna!**

(1)

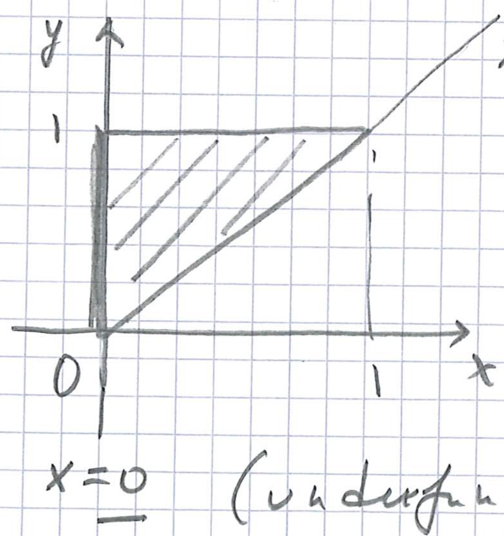


$y = \underline{x}$ (underfunktion)

$y = \underline{1}$ (överfunktion)

ovanför intervallet $[0,1]$ på x-axeln

(2)



$x = \underline{y}$ (överfunktion)

$x = \underline{0}$ (underfunktion)

ovanför intervallet $[0,1]$ på y-axeln