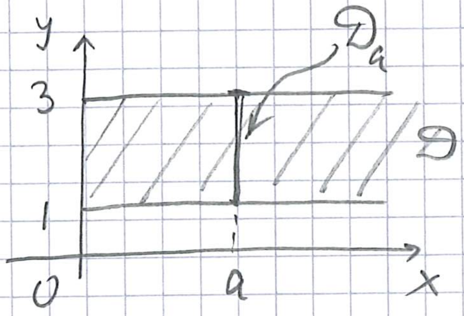
4.18 $\quad f(x,y) = xe^{-xy}, \quad \mathcal{D} = \{x \geq 0,\ 1 \leq y \leq 3\}$




Obs (i) $\mathcal{D}$ är obegränsat, icke-kompakt.

(ii) fast $f$ är kontinuerlig på $\mathcal{D}$ men $f$ behöver ej ha max eller min

Reducering till en-variabel analys:

Obs $f \geq 0$ på $\mathcal{D}$ o $f(0,y) = 0 \Rightarrow$

$$\min_{\mathcal{D}} f = 0$$

För varje $a \geq 0$ inför $\mathcal{D}_a = \{x = a,\ 1 \leq y \leq 3\}$.

$f|_{\mathcal{D}_a}$, $\quad \mathcal{D}_a = \begin{cases} x = a \\ y = t, & t \in [1,3] \end{cases}$ $\quad \Big| \quad \mathcal{D} = \bigcup_{a \geq 0} \mathcal{D}_a$

$f(a,t) = ae^{-at} = g_a(t), \quad t \in [1,3]$.

Studera $g_a(t)$:

(i) $g_a' = 0 \Leftrightarrow -a^2 e^{-at} = 0 \Leftrightarrow \emptyset$ (inga lösgar)

(ii) $g_a(1) = ae^{-a}, \quad g_a(3) = ae^{-3a}$

Obs $e^{-a} > e^{-3a} \Rightarrow \max_{\mathcal{D}_a} g_a = ae^{-a} = \varphi(a)$

$$\min_{\mathcal{D}_a} g_a = ae^{-3a} = \psi(a)$$

Definiera $\varphi(0) = \psi(0) = 0$

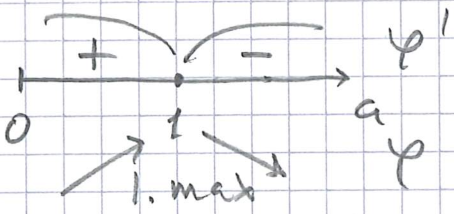
Notera $\max\limits_{\mathcal{D}} f = \max\limits_{a \geq 0} \varphi(a)$

$\min\limits_{\mathcal{D}} f = \min\limits_{a \geq 0} \varphi(a)$

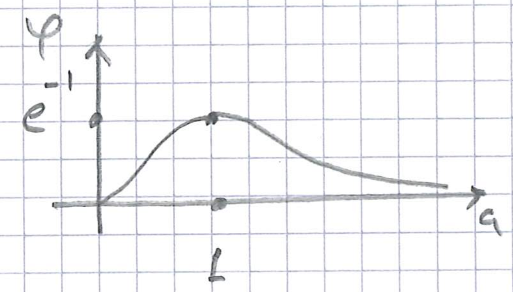
o HL, VL existerar eller icke existerar samtidigt.

Studera $\varphi(a)$:

(i) $\varphi'(a) = e^{-a} - ae^{-a} = e^{-a}(1-a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$



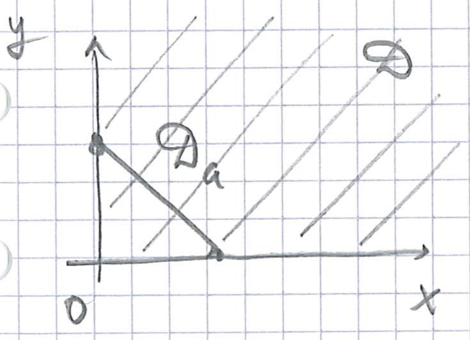

$\Rightarrow$




(ii) $\lim\limits_{a \to \infty} \varphi = 0$

$\max\limits_{a \geq 0} \varphi = e^{-1} = \max\limits_{\mathcal{D}} f$

4.19 (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{4 + (x+y)^3}$, $\mathcal{D} = \{x \geq 0, y \geq 0\}$




Obs $\mathcal{D}$ är obegränsat $\Rightarrow$ $f$ behöver ej ha max eller min.

Reducering till en-variabel analys:

Obs $f \geq 0$ på $\mathcal{D}$ o $f(0,y) = f(x,0) = 0$

$\Rightarrow \min\limits_{\mathcal{D}} f = 0$

För varje $a \geq 0$ inför $\mathcal{D}_a = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y = a\}$

$\mathcal{D} = \bigcup\limits_{a \geq 0} \mathcal{D}_a$.

$f|_{\mathcal{D}_a}$, $\mathcal{D}_a = \begin{cases} x = t \\ y = a - t, \quad t \in [0, a] \end{cases}$, $\underline{a > 0}$

$$f(t, a-t) = \frac{t(a-t)}{4+a^3} = g_a(t), \quad t \in [0, a]$$

(i) $g_a' = 0 \iff \frac{1}{4+a^3}(a - 2t) = 0 \iff t = \frac{a}{2} \in (0, a)$

$$g_a\left(\tfrac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4(4+a^3)}$$

(ii) $g_a(0) = 0, \quad g_a(a) = 0$

$\Rightarrow \max_{\mathcal{D}_a} g_a = \frac{a^2}{4(4+a^3)} = \varphi(a)$

inför $\varphi(0) = 0$.

<u>Obs</u> $\max_{\mathcal{D}} f = \max_{a \geq 0} \varphi(a)$

(VL o VL existerar samtidigt)

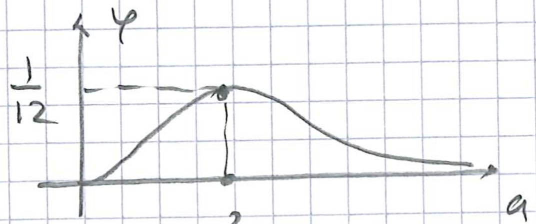
Studera $\varphi(a)$:

(i) $\varphi' = 0 \iff \frac{1}{4} \cdot \frac{2a(4+a^3) - a^2 \cdot 3a^2}{(4+a^3)^2} = \frac{8a - a^4}{4(4+a^3)^2} =$

$$= \frac{a(8-a^3)}{4(4+a^3)^2} = \frac{a(2-a)(4+2a+a^2)}{4(4+a^3)^2} = 0$$

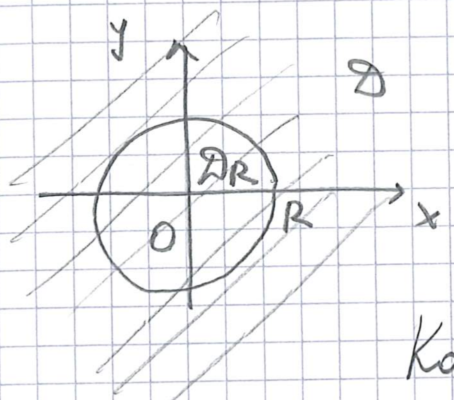
$a_{1,2} = 0, 2$


(ii) $\lim_{a \to \infty} \varphi(a) = 0$




$\Rightarrow \max_{a \geq 0} \varphi = \frac{1}{12} = \max_{\mathcal{D}} f$

(6) $f(x,y) = x^2 y e^{-x^2-2y^2}$, $\mathcal{D} = R^2$




<u>Obs</u> $\mathcal{D}$ är icke-kompakt

$\Rightarrow$ $f$ behöver ej ha max eller min.

Kompakt avskärning:

För varje $R > 0$ betrakta $\mathcal{D}_R = \{x^2 + y^2 \le R^2\}$

(en sluten cirkelskiva med radie $R$ o centrum origo)

<u>Obs</u> (i) $\mathcal{D}_R$ är kompakt
(ii) $f$ är kontinuerlig på $\mathcal{D}$ $\Bigg| \Rightarrow f\big|_{\mathcal{D}_R}$ har max o min

Inför $g = f\big|_{\mathcal{D}_R}$, studera $g(x,y)$, $(x,y) \in \mathcal{D}_R$.

1. Inre stationära punkter:

$$\nabla g = \bar{0} \iff \begin{cases} 2xy e^{'''} + x^2 y e^{'''} \cdot (-2x) = 0 \\ x^2 e^{'''} + x^2 y e^{'''} \cdot (-4y) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2xy - 2x^3 y = 0 \\ x^2 - 4x^2 y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2xy(1-x^2) = 0 \\ x^2(1-4y^2) = 0 \end{cases} \iff$$

y-axeln eller $P_1(1, \frac{1}{2})$, $P_2(1, -\frac{1}{2})$, $P_3(-1, \frac{1}{2})$, $P_4(-1, -\frac{1}{2})$

$f\big|_{y\text{-axeln}} = \underline{0}$, $f(P_1) = f(P_3) = \underline{\frac{1}{2} e^{-3/2}} > 0$

$f(P_2) = f(P_4) = \underline{-\frac{1}{2} e^{-3/2}} < 0$

(Kandidatvärde om $R$ är tillräkligt stort)

2. Randen:

$$\left| f|_{Bd\,\mathcal{D}_R} \right| = \left| \begin{array}{c} \text{Använd polära koordinater} \\ \text{o uppskatta uppifrån} \end{array} \right|$$

$$= \left| R^2\cos^2\varphi \cdot R\sin\varphi \cdot e^{-R^2\cos^2\varphi - 2R^2\sin^2\varphi} \right| \leq$$

$$\leq R^3 \cdot e^{-R^2} \quad \left( \text{ty } |\cos\varphi| \leq 1,\ |\sin\varphi| \leq 1,\ e^{-x^2-2y^2} \leq e^{-x^2-y^2} \right)$$

Notera att $R^3 \cdot e^{-R^2} \to 0$ då $R \to \infty$

det betyder att för varje $\varepsilon > 0$

finns det $R_\varepsilon > 0$ s.a. $R^3 \cdot e^{-R^2} < \varepsilon$ för alla $R \geq R_\varepsilon$

Nu sätter vi vissa krav på avskärmingen:

Välj $R$ för $\mathcal{D}_R$ så stor att

(i) $P_1, P_2, P_3, P_4$ är inre stationära punkter.

(ii) $R \geq R_{\frac{1}{2}e^{-3/2}} \Rightarrow \left| f|_{Bd\,\mathcal{D}_R} \right| < \frac{1}{2}e^{-3/2}$

Då får vi att $\max\limits_{\mathcal{D}_R} g = \frac{1}{2}e^{-3/2}$, $\min\limits_{\mathcal{D}_R} g = -\frac{1}{2}e^{-3/2}$

<u>Obs</u> 1) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R \cup (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_R)$

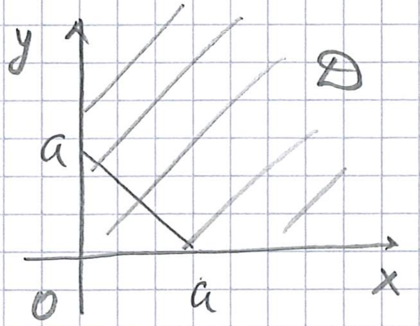
2) $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_R = \bigcup$ cirklar med radie $\geq R_{\frac{1}{2}\cdot e^{-3/2}}$ o

$$\left| f|_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_R} \right| < \frac{1}{2}e^{-3/2}$$

Det medför att $\max_{D} f = \frac{1}{2} e^{-3/2}$

$$\min_{D} f = -\frac{1}{2} e^{-3/2}$$

__4.20__ $f(x,y) = (x+y-1)(x-1)e^{-x-y}$, $D = \{x \geq 0, y \geq 0\}$.




__Obs__ $D$ är icke-kompakt $\Rightarrow$

$f$ behöver ej ha max eller min

Kompakt avskärning:

För $a > 0$ inför $D_a = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a\}$.

$$f\big|_{D_a} = g(x,y),\ (x,y) \in D_a.$$

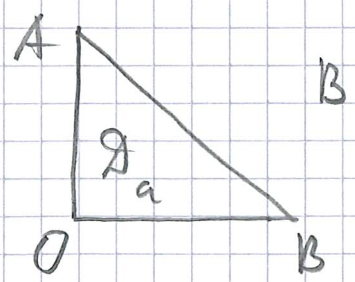
(1) $\nabla g = \bar{0} \iff \begin{cases} (x-1)e^{'''} + (x+y-1)e^{'''} - (x+y-1)(x-1)e^{'''} = 0 \\ (x-1)e^{'''} - (x+y-1)(x-1)e^{'''} = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} (x-1) + (x+y-1) - (x+y-1)(x-1) = 0 & (1) \\ (x-1) - (x+y-1)(x-1) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) − (2): $x+y-1 = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x = 1$ $\underline{o}$ $y = 0$

__Obs__ $P(1,0)$ ligger på randen till $D_a$.

(2) Randen:




$\mathrm{Bd}\, D_a = OA \cup AB \cup OB$.

$g\big|_{OA}$, $\quad OA: \begin{cases} x=0 \\ y=t, \quad t\in[0,a] \end{cases}$

$g(0,t) = (1-t)\cdot e^{-t} = h_1(t), \quad t\in[0,a]$

- $h_1' = 0 \Leftrightarrow -e^{-t} + (1-t)e^{-t}(-1) = 0 \Leftrightarrow$

$(-1+t-1) = 0 \Leftrightarrow t=2, \quad h_1(2) = \underline{-e^{-2}} < 0$

(Kandidat om $D_a$ stort)

$g\big|_{OB}$, $\quad OB: \begin{cases} x=t \\ y=0, \quad t\in[0,a] \end{cases}$

$g(t,0) = (t-1)^2 e^{-t} = h_2(t), \quad t\in[0,a]$

- $h_2' = 0 \Leftrightarrow 2(t-1)e^{-t} - (t-1)^2 e^{-t} = 0 \Leftrightarrow$

$2(t-1) - (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)\cdot(3-t) = 0$

$h_2(1) = 0, \quad h_2(3) = \underline{4e^{-3}} > 0$ (kandidat om $D_a$ stort)

<u>Obs</u> (i) $g(0,0) = 1 > 0$ (ii) $1 > 4e^{-3}$

$\left| g\big|_{AB} \right| \leq |a-1|\cdot(a+1)\cdot e^{-a} \to 0$ då $a\to\infty$

det betyder att för varje $\varepsilon > 0$

det finns $a_\varepsilon > 0$ s.a. $|a-1|\cdot(a+1)\cdot e^{-a} < \varepsilon$

för alla $a \geq a_\varepsilon$

Nu sätter vi vissa krav på avskärningen

Välj $a$ för $D_a$ så stor att

(i) $P_1(0,2)$, $P_2(3,0)$ ligger på $D_a$

(ii) $a \geqslant a_{e^{-2}} \Rightarrow \left| f|_{AB} \right| < e^{-2} < 1$

Då får man att $\max\limits_{D_a} g = 1$, $\min\limits_{D_a} g = -e^{-2}$

__Obs__ 1) $D = D_a \cup (D \setminus D_a)$

(2) $D \setminus D_a = \bigcup\limits_{m>a} I_m$, där $I_m = \{x, y \geqslant 0,\ x+y=m\}$

o $\left| f|_{D \setminus D_a} \right| < e^{-2}$

Det medför att $\max\limits_{D} f = 1$ o $\min\limits_{D} f = -e^{-2}$

__4.21__ Bestäm värdemängden för

$$f(x,y) = \frac{4x-3}{1+x^2+y^2}, \quad D = R^2$$

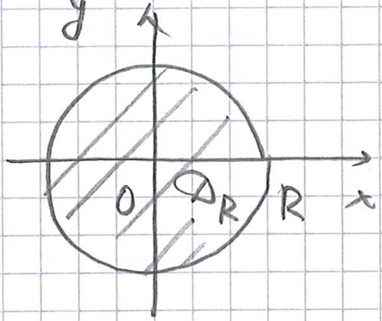
__Obs__ $D$ är __bågvissammanhängande__ område

o $f$ är kontinuerlig på $D$ $\Rightarrow$

om $f$ antar två värden $A$ o $B$ s.a. $A<B$
så antar $f$ varje mellanliggande värde
$C$: $A < C < B$.

Kompakt avskärning.

$R>0$, $D_R = \{x^2+y^2 \leq R^2\}$ (en cirkelskiva)




$$g = f\big|_{D_R}, \quad (x,y) \in D_R.$$

1) $\nabla g = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4(1+x^2+y^2)-(4x-3)\cdot 2x}{(-''-)^2} = 0 \\ \dfrac{-(4x-3)}{(-''-)^2} \cdot 2y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(1+x^2+y^2)-(4x-3)\cdot 2x = 0 & (1) \\ (4x-3)y = 0 & (2) \end{cases}$

(2): • om $4x-3=0 \curvearrowright (1)$ så finns det inga lösgar

• om $y=0 \curvearrowright (1)$ så är $4(1+x^2)-8x^2+6x=0$

eller $-4x^2+6x+4=0 \Leftrightarrow$

$x_1 = 2, \quad x_2 = -1/2 \Rightarrow P_1(2,0), \ P_2(-\frac{1}{2},0)$

$f(P_1) = \dfrac{4\cdot 2-3}{1+2^2} = 1 > 0$

$f(P_2) = \dfrac{-5}{1+\frac{1}{4}} = -4 < 0$

(Kandidater om R är stort)

(2) $\left| g\big|_{Bd D_R} \right| \le \dfrac{4R+3}{1+R^2} \to 0$ då $R \to \infty$

det betyder att för varje $\varepsilon > 0$ finns det $R_\varepsilon$ s.a. $\dfrac{4R+3}{1+R^2} < \varepsilon$ för alla $R \geq R_\varepsilon$.

Nu sätter vi vissa krav på avskärningen.

Välj $R$ för $D_R$ så stor att

(i) $P_1, P_2 \in \operatorname{Int} \mathcal{D}_R$

(ii) $R \geq R_1 \Rightarrow \left| g|_{\operatorname{Bd} \mathcal{D}_R} \right| < 1$

Då får vi att $\max_{\mathcal{D}_R} g = 1$ o $\min_{\mathcal{D}_R} g = -4$

<u>Obs</u> (1) $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R \cup (\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_R)$

(2) $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_R = \bigcup$ cirklar med radie $> R_1$

o $\left| f|_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_R} \right| < 1$

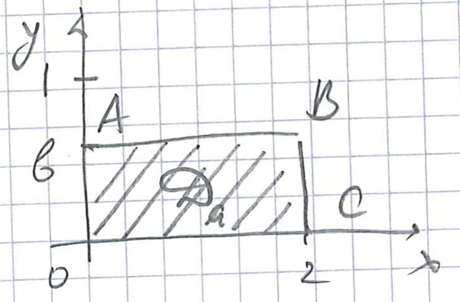
Det medför att $\max_{\mathcal{D}} f = 1$ o $\min_{\mathcal{D}} f = -4$.

antas i $P_1$     antas i $P_2$

$\Rightarrow$ Värdemängden för $f$ är $[-4, 1]$

$\underline{4.23}$ $f(x,y) = xy^2 e^{-xy}$

(a) $D_a = \{ 0 \le x \le 2, \ 0 \le y \le b \}$, $\boxed{b > 1}$



$\underline{\text{Obs}}$ (i) $D$ är kompakt

(ii) $f$ är kontinuerlig på $D$

$\Rightarrow f$ har max & $\boxed{\text{min}}$ $= 0$

1) Inre stationära punkter.

$$\nabla f = \bar{0} \iff \begin{cases} y^2 e^{''} - xy^3 e^{''} = 0 \\ 2xy e^{''} - x^2y^2 e^{''} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y^2(1-xy) = 0 & (1) \\ xy(2-xy) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $y = 0 \Rightarrow$ inga punkter, vi är på randen till $D_a$

$1 - xy = 0 \iff xy = 1 \xrightarrow{(2)}$ inga punkter

2) Randen: $\text{Bd}\, D_a = OA \cup AB \cup BC \cup OC$

$\underline{f|_{OA}}$, $OA: \begin{cases} x = 0 \\ y = t, \ t \in [0, b] \end{cases}$

$f(0,t) = \underline{\underline{0}}$ (Kandidat)

$f|_{AB}$, $AB: \begin{cases} x = t \\ y = b, \ t \in [0,2] \end{cases}$

$f(t,b) = tb^2 e^{-tb} = g_1(t), \ t \in [0,2]$

(i) • $g_1' = 0 \iff e^{''} + te^{''} \cdot (-b) = 0 \iff 1 - bt = 0$ eller

$t = \frac{1}{b} < 1$ , $g_1(\frac{1}{b}) = \underline{b e^{-1}}$ ← (Kandidater)

• $g_1(0) = 0$, $g_1(2) = \underline{2b^2 \cdot e^{-2b}}$ ←

$f|_{BC}$ , $BC: \begin{cases} x = 2 \\ y = t, & t \in [0, b] \end{cases}$

$f(2,t) = 2t^2 e^{-2t} = g_2(t), \quad t \in [0, b]$

$g_2' = 0 \iff 4te^{'''} - 4t^2 e^{'''} = 0 \iff t(1-t) = 0$ $\underline{\text{Obs}}$ $b > 1$

$g_2(1) = \underline{2e^{-2}}$ ← (Kandidat)

$f|_{OC} \underline{= 0}$

3) Lista ut funna värden

$\{\underline{be^{-1}}, 2b^2 \cdot e^{-2b}, 2e^{-2}\} \Rightarrow \max_{D_a} f = \underline{b \cdot e^{-1}}$

(b) $D_b = \{0 \leq x \leq 2, y \geq 0\}$.

Svar: Nej, ty $be^{-1} \to \infty$