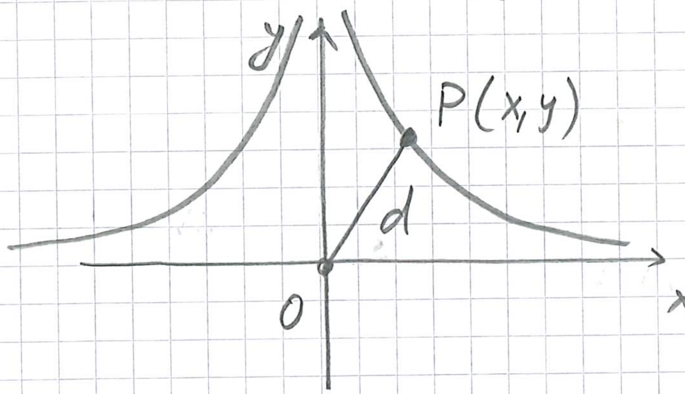
4.26 $\qquad x^2y = 16 \iff y = \frac{16}{x^2}$



Avståndet mellan origo o P är

$$d = \sqrt{x^2+y^2}$$

Problem: $d \longrightarrow \min$

Obs Kortaste avståndet finns!

Kandidatpunkter är lösningar till

$$(*)\begin{cases} \nabla d, \nabla g \text{ är linjärt beroende} \\ g = 16 \end{cases}, \text{ där } g = x^2y \text{ o } g=16 \text{ är ett bivillkor.}$$

$$(*) \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} d_x & d_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 0 \\ g = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2xy & x^2 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2y = 16 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^3 - 2xy^2 = 0 & (1) \\ x^2y = 16 & (2) \end{cases}$$

(1): $x(x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y) = 0$ $\quad$ Obs $x \neq 0$ (se (2))

(a) $x = \sqrt{2}y \xrightarrow{} (2) \Rightarrow 2y^3 = 16 \iff y = 2 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

(b) $x = -\sqrt{2}y \xrightarrow{} (2) \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -2\sqrt{2}$.

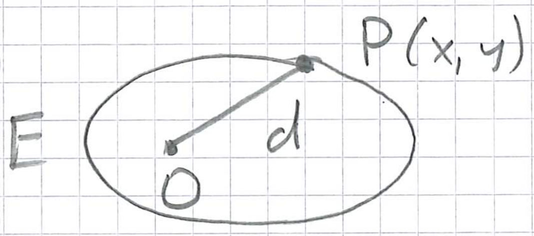
Vi får två punkter $P_1(2\sqrt{2}, 2)$, $P_2(-2\sqrt{2}, 2)$

Räkna $d(O, P_1) = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$

$d(O, P_2) = 2\sqrt{3}$

Välj min d $\underline{= 2\sqrt{3}}$

4.27 Ellips: $13x^2 + 13y^2 + 10xy = 72$



Avståndet mellan origo o P är $d = \sqrt{x^2+y^2}$.

Obs 1) E är kompakt
2) d är kontinuerlig på E $\Rightarrow$ d har max o min.

Inför $g(x,y) = 13x^2 + 13y^2 + 10xy$

Ekv $g = 72$ är ett bivillkor.

Kandidatpunkter är lösningar till

$$(*) \begin{cases} \nabla d, \nabla g \text{ är lin. beroende} \\ g = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} (26x+10y) & (26y+10x) \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = 0 \\ g = 72 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (26x+10y)y - (26y+10x)x = 0 \\ g = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 = 0 & (1) \\ g = 72 & (2) \end{cases}$$

(1) : $(y-x)(y+x)=0$

- $y=x \xrightarrow{(2)} 26x^2+10x^2=72$ eller

$x^2=2 \iff x=\pm\sqrt{2} \Rightarrow$

$P_1(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $P_2(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ är kandidater

- $y=-x \xrightarrow{(2)} 26x^2-10x^2=72$ eller

$2x^2=9 \iff x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$P_3\left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $P_4\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ är kandidater.

Räkna d:

$$d(0,P_1)=d(0,P_2)=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$$

$$d(0,P_3)=d(0,P_4)=\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}=3$$

Välj max o min av funna värden:

$\Rightarrow$ $\max d=3$ antas i P_3, P_4

$\min d=2$ antas i P_1, P_2

4.28 $f(x,y,z)=x+y+z$ (målfunktion)

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2&=\frac{83}{7} \\ x+2y+3z&=4 \end{aligned}\right\} \text{bivillkoren}$$

Inför: $g=x^2+y^2+z^2$, $g=\frac{83}{7}$ är en sfär

$h=x+2y+3z$, $h=4$ är ett plan

$$\mathcal{D} = \begin{cases} g = \frac{83}{7} \\ h = 4 \end{cases}$$ är en cirkel (Kompakt)

Obs 1) $\mathcal{D}$ är kompakt

2) f är kontinuerlig på $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$

f har min & max.

Kandidatpunkter är lsgar till

$$(*) \begin{cases} \nabla f, \nabla g, \nabla h \text{ är lin. beroende} \\ g = \frac{83}{7} \\ h = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{vmatrix} = 0 \\ g = \frac{83}{7}, \quad h = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \\ g = 83/7, \quad h = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (3y - 2z) - (3x - z) + (2x - y) = 0 \\ g = 83/7, \quad h = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 83/7 & (2) \\ x + 2y + 3z = 4 & (3) \end{cases}$$

$(1), (3) \Rightarrow x = 2 - 2z, \ y = 1 - \frac{1}{2}z \rightarrow (2)$

$$\Rightarrow (2-2z)^2 + (1 - z/2)^2 + z^2 = \frac{83}{7} \Rightarrow z_1 = \frac{16}{7}, \quad z_2 = -\frac{4}{7} \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{18}{7}, \ y_1 = -\frac{1}{7}, \qquad x_2 = \frac{22}{7}, \ y_2 = \frac{9}{7} \Rightarrow$$

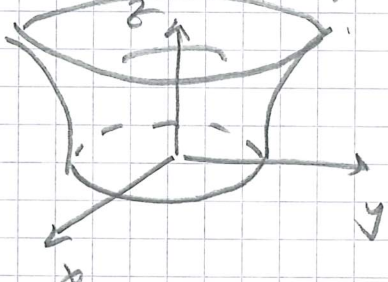
$P_1\left(-\frac{18}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{16}{7}\right)$, $P_2\left(\frac{22}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)$ (Kandidater)

Räkna $\underbrace{f(P_1) = -\frac{3}{7}}_{\min f}$, $\underbrace{f(P_2) = \frac{27}{7}}_{\max f}$

4.31 $f(x,y,z) = x+y+z \longrightarrow$ max o min

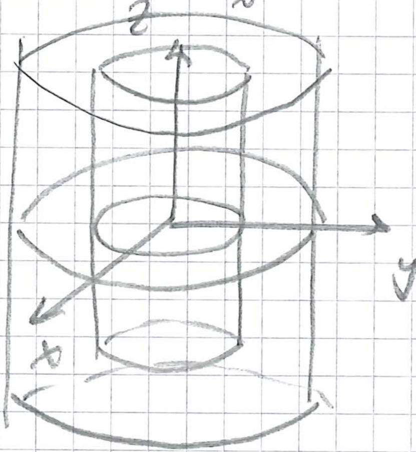
under villkoren: (a) $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$ o (b) $1 \leq x^2+y^2 \leq 3$

(a) $z \geq 0$



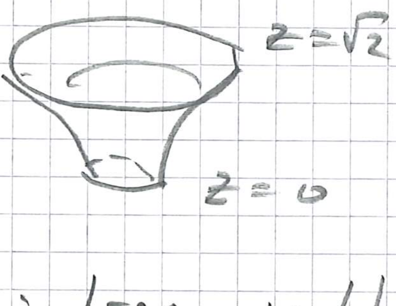
(en hyperbolod)

(b)



Området mellan två cylindrar: $x^2+y^2=1$ o $x^2+y^2=3$

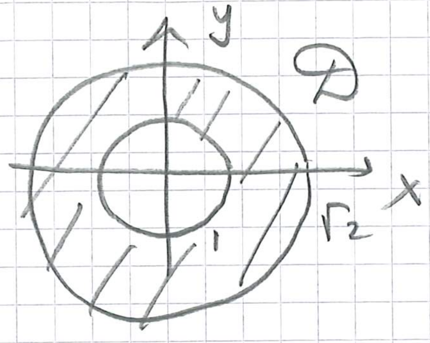
(a) o (b) definierar definitionsmängd för f:



en del av hyperbolodden mellan $z=0$ o $z=\sqrt{2}$.

Vi löser problemet genom reducering till följande problem:

Inför $g(x,y) = x+y+\sqrt{x^2+y^2-1}$ betraktat på området $1 \leq x^2+y^2 \leq 3$ i $\mathbb{R}^2$.



$g\big|_{\mathcal{D}} \longrightarrow$ max o min.

Obs 1) $\mathcal{D}$ är kompakt (en ring)

2) g är kontinuerlig

$\Rightarrow g$ har max o min.

I) $\nabla g = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}} = 0 & (1) \\ 1 + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2-1}} = 0 & (2) \end{cases}$

(inre punkter)

$\Rightarrow x = y \quad (1): \quad 1 + \dfrac{x}{\sqrt{2x^2-1}} = 0$ eller

$\begin{cases} x^2 = 2x^2 - 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \boxed{x = -1} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow P_1(-1,-1)$

Obs $P_1 \in \operatorname{Int} \mathcal{D}$

$g(P_1) = -1 - 1 + \sqrt{1+1-1} = \underline{\underline{-1}}$ (kandidatvärde)

II) Randen till $\mathcal{D}$: $\operatorname{Bd}\mathcal{D} = C_1 \cup C_2$

$C_1 = \{x^2+y^2 = 1\}$ o $C_2 = \{x^2+y^2 = 3$

(i) (ii)

$C_1: \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$g(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos\varphi + \sin\varphi = h_1(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

- $h_1'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow -\sin\varphi + \cos\varphi = 0 \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ o $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$

$h_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\sqrt{2}}$

$h_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \underline{-\sqrt{2}}$ (kandidatvärden)

- $h_1(0) = h_1(2\pi) = \underline{1}$

$$C_2: \begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\varphi \\ y = \sqrt{3}\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$g(\sqrt{3}\cos\varphi, \sqrt{3}\sin\varphi) = \sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{2} = h_2(\varphi),$$
$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

- $h_2' = 0 \iff -\sqrt{3}\sin\varphi + \sqrt{3}\cos\varphi = 0$

$$\varphi_1 = \pi/4, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$h_2(\pi/4) = \underline{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \quad h_2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \underline{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

- $h_2(0) = h_2(2\pi) = \underline{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (kandidater)

Välj max o min av

$$\{-1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, \sqrt{6} + \sqrt{2}, -\sqrt{6} + \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{2}\}$$

$$\Rightarrow \max_{D} g = \underline{\sqrt{6} + \sqrt{2} = \max f}$$

$$\min_{D} g = \underline{-\sqrt{2} = \min f.}$$

4.33 $p(x) = ax + b$, $I(a,b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\, dx \to \min$

$$\nabla I = \bar{0} \iff \begin{cases} I_a' = 0 \\ I_b' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2\int_0^1 (x^2 - ax - b)\cdot x\, dx = 0 \\ -2\int_0^1 (x^2 - ax - b)\, dx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} = 0 & (1) \\ \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - b = 0 & (2) \end{cases} \iff \begin{matrix} a = 1 \\ b = \frac{1}{-6} \end{matrix} \quad \Bigg| \Rightarrow \underline{p(x) = x - \frac{1}{6}}$$