1.13 (b) $G = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \underbrace{\frac{xy - x - y + 1}{x-1}}_{U}$

Först, testa $x=1, y=2$ i uttrycket:

$\frac{1\cdot 2 - 1 - 2 + 1}{1-1} = \frac{0}{0}$ (oklart!)

Andra, gör variabelbytet $x-1=u$, $y-2=v$

(så är $x=u+1$, $y=v+2$); Obs $(x,y)\to(1,2) \Leftrightarrow (u,v)\to(0,0)$

$U = \frac{(u+1)(v+2)-(u+1)-(v+2)+1}{(u+1)-1} =$

$= \frac{uv+2u+v+2-u-1-v-2+1}{u} = \frac{uv+u}{u} = v+1$

Testa, $u=0, v=0$ i $U = v+1$

vi får $U\Big|_{\substack{u=0\\v=0}} = \underline{1}$ (är $\underline{\underline{G}}$)

1.13 (c) $G = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \underbrace{\frac{x-y}{x-1}}_{U}$

Testa, $x=1, y=1$ i U: $U\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ (oklart!)

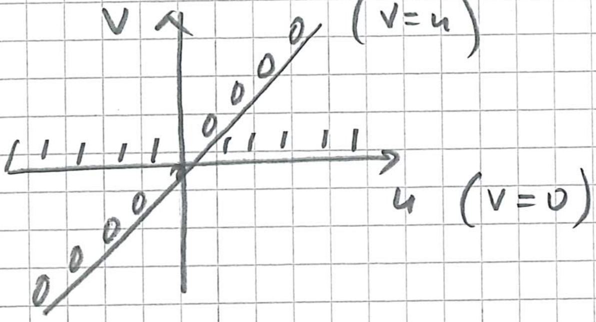
Variabelbyte: $\begin{cases} x-1=u \\ y-1=v \end{cases}$ (så är $\begin{matrix} x = u+1 \\ y = v+1 \end{matrix}$)

Obs $(u,v)\to(0,0) \Leftrightarrow (x,y)\to(1,1)$

Så är $U = \frac{(u+1)-(v+1)}{(u+1)-1} = \frac{u-v}{u}$.

I u,v-planet betrakta två räta linjer

$v=u$ o $v=0$.



Obs 1) $U\Big|_{v=u} = \frac{0}{u} = 0 \to \underline{\underline{0}}$ då $u \to 0$

2) $U\Big|_{v=0} = \frac{u-0}{u} = 1 \to \underline{\underline{1}}$ då $u \to 0$

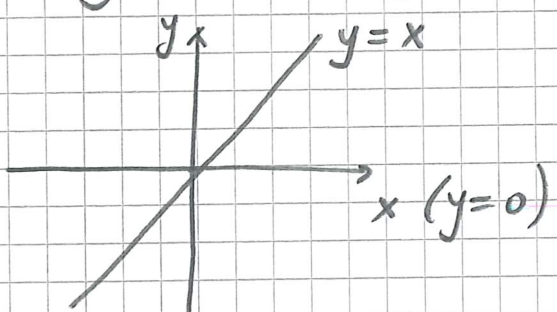
Ty $0 \neq 1$ får vi att gränsvärde finns ej.

1.13 (d): $G = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}}_{"U"}$

Testa $x=y=0$: $U\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{0}{0}$ (oklart)

I x,y-planet betrakta två räta linjer

$y=x$ o $y=0$



Obs 1) $U\Big|_{y=x} = \frac{x^2+2x^2}{2x^2+x^2} = 1 \to 1$ då $x \to 0$

2) $U\Big|_{y=0} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ då $x \to 0$

Ty $1 \neq \frac{1}{2}$ får vi att gränsvärde saknas

1.13(e) $$G = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x+y}{\ln(x^2+y^2)}}_{\text{"}U\text{"}}$$

Obs Restriktionen $U\Big|_{y=0} = \frac{x}{\ln x^2} \to 0$

då $x \to 0$

det betyder att om G finns så är $G=0$.

Låt visa att $G=0$:

Obs 1) $$|U| \le \frac{|x+y|}{|\ln(x^2+y^2)|} \le \frac{|x|+|y|}{|\ln(x^2+y^2)|} \le$$

$$\le \frac{2r}{|\ln r^2|} \quad \left(\begin{array}{l} |x| \le r = \sqrt{x^2+y^2} \\ |y| \le r = \sqrt{x^2+y^2} \end{array} \quad \underline{\underline{o}} \quad x^2+y^2=r^2 \right)$$

2) $$\frac{2r}{|\ln r^2|} \to 0 \text{ då } r \to 0 \quad (\Leftrightarrow (x,y)\to(0,0))$$

$\Rightarrow G = 0$

1.14 För att bestämma f'_x – frys y

— " — f'_y – frys x.

(a) $f'_x = (5x^4y^2 - 3x^3 - 2x^2y^3 + 5y)'_x =$

$\underline{20x^3y^2 - 9x^2 - 4xy^3}$ (Repetera att $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$,

$$f_y' = (5x^4y^2 - 3x^3 - 2x^2y^3 + 5y)_y' =$$

$$= 10x^4 \cdot y - 6x^2y^2 + 5$$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^3} + y^2$

Obs $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $\underline{o}$ (Konstant)$' = 0$.

$$f_x' = \frac{(x^3+y^2)_x' \cdot (x^2+y^3) - (x^3+y^2)\cdot(x^2+y^3)_x'}{(x^2+y^3)^2} + 0 =$$

$$= \frac{3x^2(x^2+y^3) - (x^3+y^2)\cdot 2x}{-\text{''}-} = \frac{3x^4 + 3x^2y^3 - 2x^4 - 2xy^2}{(x^2+y^3)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^3 - 2xy^2}{(x^2+y^3)^2},$$ Analogt, f_y'.

(c) $f(x,y) = (xy^2+1)^5$

Repetera kedjeregeln: $\left(h(g(x))\right)' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$ (yttre, inre)

/ $h'(g(x))$ är h:s derivata beräknat i $g(x)$ /

$$f_x' = 5(xy^2+1)^4 \cdot (xy^2+1)_x' = 5(xy^2+1)^4 \cdot y^2$$

(här vi hade $h(t) = t^5$, $g(x) = xy^2+1$).

Analogt, f_y'.

(d) $\underline{\text{Obs}}$ $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$

$f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$, $f'_x = $ /använd kedjeregeln/ $=$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{\overset{=0}{y'_x} \cdot x - y \cdot \overset{=1}{x'_x}}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{(-y)}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$ Analogt, f'_y.

(f) $f(x,y) = y^{xy}$,

Repetera att $(e^t)' = e^t$. $(a^t)' = ((e^{\ln a})^t)' =$

$$= (e^{t \cdot \ln a})' = \text{/Kedjeregeln/} = e^{t \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^t \cdot \ln a$$

($\underline{\text{Obs}}$ $a > 0$)

Så är $f'_x = $ /Kedjeregeln/ $= (y^{xy} \cdot \ln y) \cdot (xy)'_x =$

$$= y^{xy+1} \cdot \ln y.$$

Notera att $f'_y = ((e^{\ln y})^{xy})'_y =$

$$= (e^{xy \cdot \ln y})'_y = e^{xy \cdot \ln y} \cdot (xy \cdot \ln y)'_y = \overset{\text{produktreg.}}{/(u \cdot v)' = u'v + uv'/}$$

$$= y^{xy} \cdot x \left(1 \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y}\right) = y^{xy} \cdot x \cdot (1 + \ln y).$$

1.17 Finn $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx}$

(a) Repetera att $f''_{xx} = (f'_x)'_x$, $f''_{xy} = (f'_x)'_y$

Först, räkna $f'_x = (e^{2x} \cdot \sin(x-y))'_x = $ /produkt regeln/

$= 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin(x-y) + e^{2x} \cdot \cos(x-y) \cdot 1$

Nu får vi

$f''_{xx} = ((2 \cdot \sin(x-y) + \cos(x-y))e^{2x})'_x =$

$= (2\cos(x-y) - \sin(x-y)) \cdot e^{2x} + (2\sin(x-y) +$
$+ \cos(x-y)) \cdot e^{2x} \cdot 2 = (4\cos(x-y) + 3\sin(x-y)) \cdot e^{2x}$

/ notera att $(\sin t)' = \cos t$ o $(\cos t)' = -\sin t$ /

$f''_{xy} = ((2\sin(x-y) + \cos(x-y))e^{2x})'_y =$

$= e^{2x} \cdot (2\cos(x-y) \cdot (-1) - \sin(x-y) \cdot (-1)) =$

$= e^{2x}(\sin(x-y) - 2\cos(x-y))$.

För "snälla" funktioner (av klass $C^{(2)}$)

har $\boxed{f''_{xy} = f''_{yx}}$

$f''_{yy} = (f'_y)'_y = $ /hitta själv/.

(c) $f(x,y,z)=\ln(x^2+xy+yz)$

Finn $f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{zz}, f''_{xy}, f''_{xz}, f''_{yz}$

$f''_{yx} \quad f''_{zx} \quad f''_{zy}$

Repetera att $(\ln t)'=\frac{1}{t}$.

$f'_x = \big/$ frys y o z ! $\big/ = \frac{1}{x^2+xy+yz}\cdot(2x+y)$

$f''_{xx}=(f'_x)'_x=\left(\frac{2x+y}{x^2+xy+yz}\right)'_x=\big/$ kvotregeln $\big/$

$$=\frac{2\cdot(x^2+xy+yz)-(2x+y)\cdot(2x+y)}{(x^2+xy+yz)^2}=$$

$$=\frac{-2x^2-2xy-y^2+2yz}{(x^2+xy+yz)^2}$$

o s v