4.1 Taylor utveckling för $f(x,y)$ i punkten $P_0(x_0,y_0)$ av ordning 2:

$$f(x,y) = f(P_0) + f_x'(P_0)\cdot(x-x_0) + f_y'(P_0)\cdot(y-y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(f_{xx}''(P_0)\cdot(x-x_0)^2 + 2f_{xy}''(P_0)\cdot(y-y_0)\cdot(x-x_0)$$
$$+ f_{yy}''(P_0)\cdot(y-y_0)^2\Big) + \text{Restterm.}$$

Inför $x-x_0=h$, $y-y_0=k$.

Taylorpolynom av ord 1:

$$P_1(h,k) = f(P_0) + f_x'(P_0)\cdot h + f_y'(P_0)\cdot k$$

Taylorpolynom av ord 2:

$$P_2(h,k) = P_1(h,k) + \frac{1}{2}\Big(f_{xx}''(P_0)\cdot h^2 +$$
$$+ 2f_{xy}''(P_0)\cdot h\cdot k + f_{yy}''(P_0)\cdot k^2\Big)$$

Resttermen $= B(h,k)\cdot(h^2+k^2)^{3/2}$, där

$B(h,k)$ är en begränsad nära $(0,0)$ funktion d.v.s. det finns två tal $C>0$ o $r>0$ s.a. $|B(h,k)|\le C$ för alla $(h,k)$ med $|h|\le r$, $|k|\le r$.

(a) $f(x_1, x_2) = (1 + x_1 + 2x_2)^2$, $P_0(1,1)$

Räkna: $f(1,1) = (1+1+2)^2 = 16$

$f'_{x_1} = 2(1 + x_1 + 2x_2)$, $f'_{x_1}(P_0) = 2 \cdot 4 = 8$

$f'_{x_2} = 2 \cdot (1 + x_1 + 2x_2) \cdot 2$, $f'_{x_2}(P_0) = 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$

$\Rightarrow P_1(h,k) = 16 + 8h + 16k$

$f''_{x_1 x_1} = (f'_{x_1})'_{x_1} = 2$, $f''_{x_1 x_1}(P_0) = 2$

$f''_{x_1 x_2} = (f'_{x_2})'_{x_2} = 4$, $f''_{x_1 x_2}(P_0) = 4$

$f''_{x_2 x_2} = (f'_{x_2})'_{x_2} = 8$, $f''_{x_2 x_2}(P_0) = 8$

$\Rightarrow P_2(h,k) = P_1(h,k) + \frac{1}{2}(2h^2 + 2 \cdot 4hk + 8k^2)$

$= 16 + 8h + 16k + h^2 + 4hk + 4k^2$

(b) $f(x_1, x_2) = (1 + x_1 + 2x_2)^{-1}$, $P_0(1,1)$

Räkna: $f(P_0) = 1/4$

$f'_{x_1} = \frac{-1}{(1 + x_1 + 2x_2)^2}$, $f'_{x_1}(P_0) = -\frac{1}{16}$

$f'_{x_2} = \frac{-2}{(1 + x_1 + 2x_2)^2}$, $f'_{x_2}(P_0) = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow P_1(h,k) = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}h - \frac{1}{8}k$

$$f''_{x_1x_1} = (f'_{x_1})'_{x_1} = \frac{2}{(1+x_1+2x_2)^3}, \quad f''_{x_1x_1}(P_0) = \frac{2}{4^3} = \frac{1}{32}$$

$$f''_{x_1x_2} = (f'_{x_1})'_{x_2} = \frac{4}{(1+x_1+2x_2)^3}, \quad f''_{x_1x_2}(P_0) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}$$

$$f''_{x_2x_2} = (f'_{x_2})'_{x_2} = \frac{8}{(1+x_1+2x_2)^3}, \quad f''_{x_2x_2}(P_0) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P_2(h,k) = P_1(h,k) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{32}h^2 + 2\cdot\frac{1}{16}hk + \frac{1}{8}k^2\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16}h - \frac{1}{8}k + \frac{1}{64}h^2 + \frac{1}{16}hk + \frac{1}{16}k^2$$

<u>4.2</u> (a) $f(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1} + \sin(x_1x_2) - 2\ln(1+x_1\cdot x_3 + x_2\cdot x_3)$

$P_0(0,0,0)$

$$f(P_0) = e^0 + \sin 0 - 2\ln(1+0) = 1$$

$$f'_{x_1} = e^{x_1} + x_2\cdot\cos(x_1\cdot x_2) - \frac{2x_3}{1+x_1\cdot x_3 + x_2\cdot x_3},$$

$$f'_{x_1}(P_0) = 1,$$

$$f'_{x_2} = x_1\cdot\cos(x_1\cdot x_2) - \frac{2x_3}{1+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3}, \quad f'_{x_2}(P_0) = 0$$

$$f'_{x_3} = \frac{-2(x_1+x_2)}{1+x_1\cdot x_3 + x_2\cdot x_3}, \quad f'_{x_3}(P_0) = 0$$

$$\Rightarrow P_1(h,k,l) = 1 + 1\cdot h + 0\cdot k + 0\cdot l = 1+h$$

$$f''_{x_1x_1} = (f'_{x_1})'_{x_1} = e^{x_1} - x_2^2\sin(x_1x_2) + \frac{2x_3^2}{(1+x_1x_3+x_2x_3)^2},$$

$$f''_{x_1 x_1}(P_0) = 1$$

$$f''_{x_1 x_2} = (f'_{x_1})'_{x_2} = \cos(x_1 \cdot x_2) - x_1 \cdot x_2 \sin(x_1 \cdot x_2) +$$

$$+ \frac{2 x_3^2}{(1 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2}, \quad f''_{x_1 x_2}(P_0) = 1$$

$$f''_{x_2 x_2} = (f'_{x_2})'_{x_2} = -x_1^2 \cdot \sin(x_1 x_2) + \frac{2 x_3^2}{1 + x_1 x_3 + x_2 x_3}$$

$$f''_{x_2 x_2}(P_0) = 0$$

$$f''_{x_3 x_3} = (f'_{x_3})'_{x_3} = \frac{2(x_1 + x_2)^2}{(1 + x_1 \cdot x_3 + x_2 x_3)^2}, \quad f''_{x_3 x_3}(P_0) = 0$$

$$f''_{x_1 x_3} = (f'_{x_1})'_{x_3} = -2\left(\frac{1 \cdot (1 + x_1 \cdot x_3 + x_2 x_3) - x_3 \cdot (x_1 + x_2)}{(1 + x_1 \cdot x_3 + x_2 x_3)^2}\right)$$

$$f''_{x_1 x_3}(P_0) = -2$$

$$f''_{x_2 x_3} = (f'_{x_2})'_{x_3} = -2\left(\frac{1 \cdot (1 + x_1 x_3 + x_2 \cdot x_3) - x_3 \cdot (x_1 + x_2)}{(1 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2}\right)$$

$$f''_{x_2 x_3}(P_0) = -2$$

$$P_2(h, k, e) = P_1(h, k, e) + \frac{1}{2}\left(1 \cdot h^2 + 0 \cdot k^2 + 0 \cdot e^2 +\right.$$

$$\left.+ 2 \cdot 1 \cdot h \cdot k + 2 \cdot (-2)\, h \cdot e + 2 \cdot (-2) \cdot ke\right) =$$

$$= 1 + h + \frac{1}{2} h^2 + hk - 2he - 2ke$$

(b) $f(x_1, x_2) = (1 + x_1 + x_2^2)^{1/2}$, $P_0(0,0)$

$f(P_0) = 1$

$f'_{x_1} = \frac{1}{2}(1 + x_1 + x_2^2)^{-1/2}$, $f'_{x_1}(P_0) = \frac{1}{2}$

$f'_{x_2} = \frac{1}{2} \cdot (1 + x_1 + x_2^2)^{-1/2} \cdot 2x_2$, $f'_{x_2}(P_0) = 0$

$\Rightarrow P_1(h, k) = 1 + \frac{1}{2}h + 0 \cdot k = 1 + \frac{1}{2}h$

$f''_{x_1 x_1} = (f'_{x_1})'_{x_1} = -\frac{1}{4}(1 + x_1 + x_2^2)^{-3/2}$, $f''_{x_1 x_1}(P_0) = -\frac{1}{4}$

$f''_{x_1 x_2} = (f'_{x_1})'_{x_2} = -\frac{1}{4}(1 + x_1 + x_2^2)^{-3/2} \cdot 2x_2$, $f''_{x_1 x_2}(P_0) = 0$

$f''_{x_2 x_2} = (f'_{x_2})'_{x_2} = 1 \cdot (1 + x_1 + x_2^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}x_2 \cdot (1 + x_1 + x_2^2)^{-3/2} \cdot 2x_2$

$f''_{x_2 x_2}(P_0) = 1$

$\Rightarrow P_2(h, k) = P_1(h, k) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}h^2 + 2 \cdot 0 \cdot hk + k^2\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{2}k^2$

4.3 $f(x_1, x_2) = \ln(2x_1^2 + x_2^2) - 2x_2$, $P_0(0,1)$

$f(P_0) = \ln(0 + 1) - 2 \cdot 1 = -2$

$f'_{x_1} = \frac{4x_1}{2x_1^2 + x_2^2}$, $f'_{x_1}(P_0) = 0$

$f'_{x_2} = \frac{2x_2}{2x_1^2 + x_2^2} - 2 = \frac{2}{0+1} - 2 = 0$

$$\Rightarrow P_1(h,k) = -2 + 0\cdot h + 0\cdot k = -2$$

$$f''_{x_1x_1} = (f'_{x_1})'_{x_1} = \frac{4(2x_1^2+x_2^2) - 4x_1 \cdot 4x_1}{(2x_1^2+x_2^2)^2},$$

$$f''_{x_1x_1}(P_0) = 4$$

$$f''_{x_1x_2} = (f'_{x_1})'_{x_2} = -\frac{8x_1x_2}{(2x_1^2+x_2^2)^2}, \quad f''_{x_1x_2}(P_0) = 0$$

$$f''_{x_2x_2} = (f'_{x_2})'_{x_2} = \frac{2(2x_1^2+x_2^2) - 2x_2 \cdot 2x_2}{(2x_1^2+x_2^2)^2}$$

$$f''_{x_2x_2}(P_0) = -2$$

$$\Rightarrow P_2(h,k) = P_1(h,k) + \frac{1}{2}\left(4h^2 + 2\cdot 0\cdot hk - 2k^2\right) =$$

$$= -2 + 2h^2 - k^2$$