4.4 Avgör karaktären hos följande kvadratiska former.

Repetera att en kvadratisk form $Q(h,k)$ är

(i) positivt definit om $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) o $Q(h,k)=0 \iff h=k=0$.

(ii) positivt semidefinit om $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) o $Q(h,k)=0 \not\Leftrightarrow h=k=0$

(iii) negativt definit om $Q(h,k) \leq 0$ för alla (h,k) o $Q(h,k)=0 \iff h=k=0$

(iv) negativt semidefinit om $Q(h,k) \leq 0$ för alla (h,k) o $Q(h,k)=0 \not\Leftrightarrow h=k=0$

(v) indefinit om det finns (h_i,k_i), $i=1,2$, s.a. $Q(h_1,k_1)>0$ o $Q(h_2,k_2)<0$.

Analogt, för $Q(h,k,l)$ osv.

(d) $Q(h,k) = h^2+k^2-hk =$ /kvadratkomplettera/

$$= \left(h-\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k^2 = \left(h-\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2$$

Obs (i) $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k)

(ii) $Q(h,k)=0 \iff \begin{cases} h-\frac{k}{2}=0 \\ k=0 \end{cases} \iff h=k=0$

$\Rightarrow$ Q är pos. def.

(c) $Q(h,k) = h^2 + k^2 + 2hk = (h+k)^2$

<u>Obs</u> (i) $Q(h,k) \geq 0$ för alla (h,k)

(ii) $Q(h,k) = 0 \Leftrightarrow h+k=0$

(bl.a. $(h,k) = (1,-1)$ satisfierar den $Q=0$)

$\Rightarrow$ Q är pos. semidef.

(f) $Q(h,k) = h^2 + k^2 + 4hk = |\text{Kvadratkomplettera}|$

$(h+2k)^2 - 4k^2 + k^2 = (h+2k)^2 - 3k^2$

<u>Obs</u> (i) om $h+2k=1$ o $k=0$ så är

$Q = 1 > 0$ (till exempel, $h=1, k=0$)

(ii) om $h+2k=0$ o $k=1$ så är

$Q = -3 < 0$ (till exempel, $h=-2, k=1$)

$\Rightarrow$ Q är indefinit

<u>4.5</u> (b) $Q(h,k,m) = h^2 + k^2 - m^2$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\text{Obs}}\ (i)\ Q(0,0,1) = -1 < 0 \\ (ii)\ Q(1,0,0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q \text{ är indefinit.}$$

(c) $Q(h,k,m) = h^2 + k^2$

<u>Obs</u> (i) $Q(h,k,m) \geq 0$ för alla (h,k,m)

(ii) $Q(0,0,1)=0$

$\Rightarrow$ Q är pos. semidefinit

(e) $Q(h,k,m) = h^2 - k^2 - m^2 + 2hk + 4km =$

/Kvadratkomplettera/ $= (h+k)^2 - k^2 - k^2 - m^2 + 4km =$

$= (h+k)^2 - 2k^2 - m^2 + 4km = (h+k)^2 - (2k+m)^2 + 2k^2$

<u>Obs</u> (i) om $h+k=1$, $2k+m=0$, $k=0$

så är $Q = 1 > 0$ (till ex $h=1$, $k=m=0$)

(ii) om $h+k=0$, $2k+m=1$, $k=0$ så

är $Q = -1 < 0$ (till ex. $h=k=0$, $m=1$)

$\Rightarrow$ Q är indefinit

<u>4.6</u> Repetera att om $P_0(x_0, y_0)$ är

en <u>lokal extrempunkt</u> <u>o</u> $\nabla f(P_0)$ existerar

så är $\nabla f(P_0) = \overline{0}$ (d v s $f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$)

P_0 är <u>en stationär punkt</u>

Bl. a om P_0 är ingen stationär punkt

så är P_0 ingen lok. extrempunkt.

(a) $f(x,y) = (x^2+y^2-1)e^y$, $P_0(0,0)$

Räkna: $f'_x = 2xe^y$, $f'_x(P_0) = 0$

$f'_y = 2ye^y + (x^2+y^2-1)e^y$, $f'_y(P_0) = -1$

<u>Obs</u> $\nabla f(P_0) = (0,1) \neq \overline{0} \Rightarrow P_0$ är ingen stationär punkt $\Rightarrow P_0$ är ingen lok. extrempunkt

(b) $g(x,y) = (1+\sin(x+y))\ln(1+2x+y) - 2x - y$

$g'_x = \cos(x+y)\ln(1+2x+y) + (1+\sin(x+y))\cdot\frac{2}{1+2x+y}$

-2; $g'_x(P_0) = 0+2-2 = 0$

$g'_y = \cos(x+y)\ln(1+2x+y) + (1+\sin(x+y))\cdot\frac{1}{1+2x+y}$

$-1 = 0+1-1 = 0$

$\Rightarrow \nabla g(P_0) = \overline{0} \Rightarrow P_0$ är en stationär punkt.

<u>Obs</u> En stationär punkt behöver ej vara en lokal extrempunkt

Det krävs en extra undersökning.

Prova med kvadratiska formen $Q(h,k)$

i punkten: $Q(h,k) = f''_{xx}(P_0)\cdot h^2 + 2f''_{xy}(P_0)hk + f''_{yy}(P_0)k^2$

Repetera att om Q är pos. def. så är P_0 en str. lok. minimipunkt,

om Q är negat. def. så är P_0 en str. lok. maximipunkt,

om Q är indefinit så är P_0 en sadelpunkt.

om Q är semidefinit så undersök vidare (till exempel, använd definitionen på lokall extrempunkter).

(b) (forts)

$$g''_{xx} = (g'_x)'_x = -\sin(x+y)\ln(1+2x+y) + \cos(x+y)\cdot\frac{2}{1+2x+y}$$

$$+ \cos(x+y)\cdot\frac{2}{1+2x+y} + (1+\sin(x+y))\cdot\frac{(-4)}{(1+2x+y)^2}$$

$$g''_{xx}(P_0) = 0+2+2-4 = 0$$

$$g''_{xy} = (g'_x)'_y = -\sin(x+y)\ln(1+2x+y) +$$

$$+ \cos(x+y)\cdot\frac{1}{1+2x+y} + \cos(x+y)\cdot\frac{2}{1+2x+y} +$$

$$+ (1+\sin(x+y))\cdot\frac{(-2)}{(1+2x+y)^2}, \quad g''_{xy}(P_0) =$$

$$= 0+1+2-2 = 1.$$

$$g''_{yy} = (g'_y)'_y = -\sin(x+y)\ln(1+2x+y) +$$

$$+ \cos(x+y)\cdot\frac{1}{1+2x+y} + \cos(x+y)\cdot\frac{1}{1+2x+y} +$$

$$+ (1+\sin(x+y))\cdot\frac{(-1)}{(1+2x+y)^2}, \quad g''_{yy}(P_0) = 0+1+1-1 = 1$$

$\Rightarrow Q(h,k) = 0\cdot h^2 + 2\cdot hk + k^2 = 2hk + k^2$

$= /\text{kvadratkomplettera}/ = (h+k)^2 - h^2$

<u>Obs</u> (i) om $h+k=1$ o $h=0$ så är $Q = 1 > 0$

(till ex. $h=0, k=1$)

(ii) om $h+k=0$ o $h=1$ så är $Q = -1 < 0$

(till ex. $h=1, k=-1$)

$\Rightarrow$ Q är indefinit $\Rightarrow$ P_0 är en sadelpunkt

(ingen lok. extrempunkt).

(c) $h(x,y,z) = 1 + x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 6yz - 2xz$

(1)
$$\left.\begin{aligned} h'_x &= 2x - 2y - 2z, & h'_x(P_0) &= 0 \\ h'_y &= 4y - 2x + 6z, & h'_y(P_0) &= 0 \\ h'_z &= 10z + 6y - 2x, & h'_z(P_0) &= 0 \end{aligned}\right] \Rightarrow \text{P_0 är en stationär punkt.}$$

(2) Kvadratiska formen Q:

$h''_{xx} = 2$, $h''_{xx}(P_0) = 2$, $h''_{xy} = -2$, $h''_{xy}(P_0) = -2$

$h''_{yy} = 4$, $h''_{yy}(P_0) = 4$, $h''_{xz} = -2$, $h''_{xz}(P_0) = -2$

$h''_{zz} = 10$, $h''_{zz}(P_0) = 10$, $h''_{yz} = 6$, $h''_{yz}(P_0) = 6$

$\Rightarrow Q(h,k,m) = 2h^2 + 4k^2 + 10m^2 + 2\cdot(-2)hk +$

$+ 2\cdot(-2)hm + 2\cdot 6\, km = 2(\underline{h^2} + 2k^2 + 5m^2 \underline{- 2hk}$

$\underline{- 2hm} + 6km)$

Kvadratkomplettera med 3 variabler:

$(a+b+c)^2 = \underline{a^2} + b^2 + c^2 + \underline{2ab} + \underline{2ac} + 2bc$

$\Rightarrow \underline{a^2 + 2ab + 2ac = (a+b+c)^2 - b^2 - c^2 - 2bc}$

$Q = 2(\underline{(h-k-m)^2 - k^2 - m^2 - 2km} + 2k^2 + 5m^2$

$+ 6km) = 2((h-k-m)^2 + k^2 + 4m^2 + 4km) =$

$= 2((h-k-m)^2 + (2m+k)^2)$

Obs (i) $Q \geq 0$ för alla (h,k,m)

(ii) om $h-k-m=0$ o $2m+k=0$ så är

$Q = 0$. (till ex. $h=1$, $k=2$, $m=-1$)

$\Rightarrow Q$ är pos. semidefinit

(3) Använd definitionen:

$D = h(x,y,z) - h(0,0,0) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy + 6yz$

$-2xz = (x-y-z)^2 + (2y+z)^2 \geq 0$ för alla (x,y,z)

$\Rightarrow$ P_0 är en (lok.) minimipunkt.

<u>4.7</u> Bestäm alla lok. extrempunkter

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 3$

1) Finn alla stationära punkter:

$$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 4y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = -1 \end{matrix}$$

det finns bara en stationär punkt $P_0(2,-1)$

2) Studera P_0 mha kvadratiska formen

$f''_{xx} = 2, \; f''_{xy} = 0, \; f''_{yy} = 4$

$\Rightarrow Q(h,k) = 2h^2 + 4k^2$

<u>Obs</u> Q är pos. def $\Rightarrow$ $P_0(2,-1)$ är en str. lok. minimipunkt.

(b) $g(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^3 - 15y$

(1) $$\nabla g = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy + 3y^2 - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ 2xy + y^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$: $x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow x(x-2y) = 0$

(i) $x = 0 \xrightarrow{} (1) \Rightarrow y = \pm\sqrt{5} \Rightarrow P_1(0,\sqrt{5}), P_2(0,-\sqrt{5})$

(ii) $x - 2y = 0 \xrightarrow{} (1) \Rightarrow 5y^2 = 5 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow P_3(2,1), P_4(-2,-1)$

$P_1 - P_4$ är fyra stationära punkter.

Använd kvadratiska former

$f''_{xx} = 6x$, $f''_{xy} = 6y$, $f''_{yy} = 6x + 6y$

		f''_{xx}	f''_{xy}	f''_{yy}
$(0,\sqrt{5})$	P_1	0	$6\sqrt{5}$	$6\sqrt{5}$
$(0,-\sqrt{5})$	P_2	0	$-6\sqrt{5}$	$-6\sqrt{5}$
$(2,1)$	P_3	12	6	18
$(-2,-1)$	P_4	-12	-6	-18

P_1: $Q(h,k) = 2\cdot 6\sqrt{5}\,hk + 6\sqrt{5}\,k^2 = 6\sqrt{5}(2hk + k^2) =$

$= 6\sqrt{5}\left((h+k)^2 - h^2\right)$, indefinit, sadelpunkt.

P_2: $Q(h,k) = -2\cdot 6\sqrt{5}\,hk - 6\sqrt{5}\,k^2 =$

$= -6\sqrt{5}\left((h+k)^2 - h^2\right)$, indefinit, sadelpunkt.

P_3: $Q(h,k) = 12h^2 + 12hk + 18k^2 =$

$= 12\left(h^2 + hk + \frac{3}{2}k^2\right) = 12\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + \frac{3}{2}k^2\right) =$

$= 12\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}k^2\right)$, pos. def., en str. lok. min.

P_4: $Q(h,k) = -12h^2 - 12hk - 18k^2 =$

$= -12\left(\left(h+\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}k^2\right)$, negat. def., en str. lok. max.

$\underline{4.9}$ (a) $f(x,y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + x^4$; $P_0(0,0)$

(1) <u>Obs</u> $\nabla f(P_0) = \bar{0}$, P_0 är en stationär punkt.

(2) $Q(h,k) = 8h^2 + 24hk + 18k^2 =$

$= 2\cdot(2h+3k)^2$, pos. semidefinit

(3) $f(x,y) - \underbrace{f(P_0)}_{0} = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + x^4 =$

$= (2x+3y)^2 + x^4 \geq 0$ för alla (x,y)

$\Rightarrow$ P_0 är en (lok.) min

(b) $g(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2xz -$

$- 2yz$, $P_0(0,0,0)$

(1) $\nabla g(P_0) = \bar{0}$, P_0 är en stationär punkt.

(2) $Q(h,k,m) = -2h^2 - 2k^2 - 2m^2 - 4hk - 4hm$

$- 4km = -2(\underline{h^2} + k^2 + m^2 + \underline{2hk} + \underline{2hm} + 2km) =$

$= -2((h+k+m)^2 - k^2 - m^2 - 2km + k^2 + m^2 + 2km) =$

$= -2\cdot(h+k+m)^2 \leq 0$ för alla (h,k,m), negat. semidefinit.

(3) $g(x,y,z) - \overset{=0}{g(P_0)} = x^4 + y^4 + z^4 - (x+y+z)^2 = D$

<u>Obs</u> (i) $x^4 - x^2 < 0$ för små x $\Big|$ $\Rightarrow$ P_0 är

(ii) $D\Big|_{x+y+z=0} > 0$ $\Big|$ en sadelpunkt.

(c) $h(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2\sin(xy)$, $P_0(0,0,0)$

(1) $\nabla h(P_0) = \bar{0}$, P_0 är en stationär punkt.

(2) $Q(h,k,\ell) = 2h^2+2k^2+2m^2+4hk =$

$= 2(h^2+k^2+m^2+2hk) = 2((h+k)^2+m^2)$,

pos. semidefinit.

(3) $h(x,y,z) - \overset{=0}{h(P_0)} = x^2+y^2+z^2+2\sin(xy) =$

$= (x^2+y^2+2\sin(xy)) + z^2 \geq \quad / \; x^2+y^2 \geq 2|xy| \; /$

$(2|xy|+2\sin(xy)) + z^2 \geq \quad / \; |t| \geq |\sin t| \; / \geq 0$

$\Rightarrow$ P_0 är en (lok.) min.