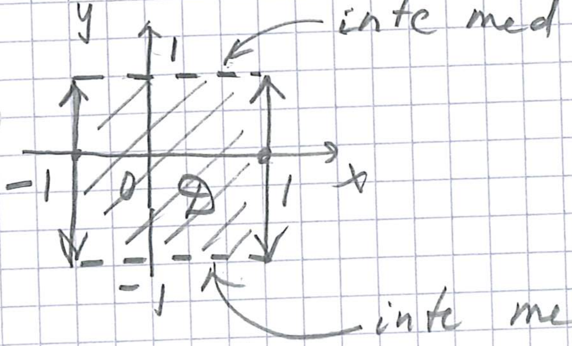
4.10. Repetera att varje kontinuerlig funktion på ett kompakt område har minsta o största värde

Ett kompakt område i R^n = slutet o begränsat.

Data: f är kontinuerlig på $D \subseteq R^2$.
Fråga: antar f säkert ett största värde?

(a) $D = \{(x,y) : |x| \leq 1, |y| < 1\}$



Obs D är inte slutet

$\Rightarrow$ D är icke kompakt.

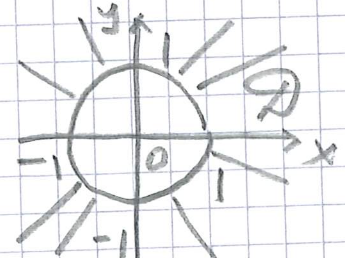
Svar: nej.

Ex. $f(x,y) = \dfrac{1}{|y^2-1|}$

(b) $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ är en sluten cirkelskiva med radie 1 o centrum i origo.

Obs D är kompakt. $\Rightarrow$ Svar: ja.

(c) $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1\}$. är komplement till en öppen cirkelskiva med radie 1 o centrum i origo

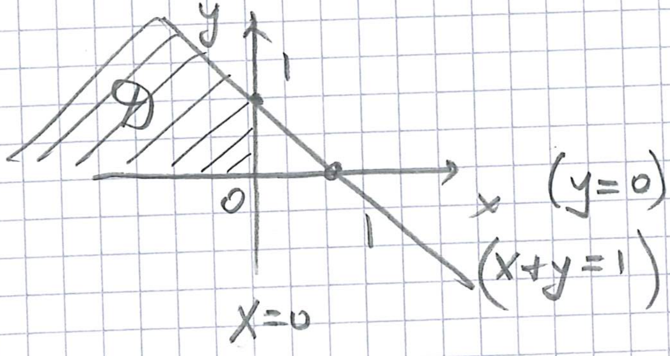


Obs D är slutet men icke begränsat. $\Rightarrow$ icke-kompakt.

Svar: nej

Ex. $f(x,y) = x$

(e) $D = \{(x,y) : x \le 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1\}$.



Obs D är slutet men icke-begränsat

$\Rightarrow$ D är icke-kompakt

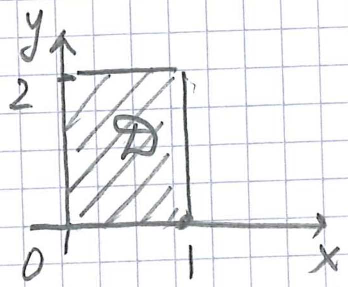
Svar: nej

Ex: $f(x,y) = y$

4.11 Bestäm största o minsta värde av

(a) $f(x,y) = y \cdot e^x - xy^2$; $D = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$.

Rita



Obs (i) f är kontinuerlig på D

(ii) D är kompakt

$\Rightarrow$ f har största o minsta värde

(1) Finn inre stationära punkter:

$$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ye^x - y^2 = 0 & (1) \\ e^x - 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $y(e^x - y) = 0$
- om $y = 0$ får vi inga inre punkter
- om $e^x - y = 0$ (2) $\Rightarrow$

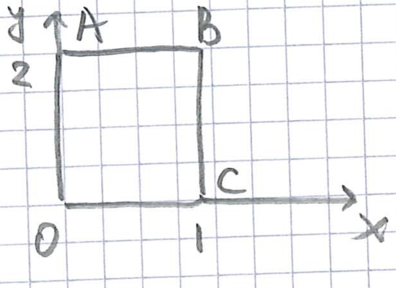
$2xy - y = 0$ eller $y(2x-1) = 0$ $(y \neq 0)$

$x = \frac{1}{2}$ $\rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ $y = \sqrt{e}$.

Obs $P_1\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$ är en inre punkt till $\mathcal{D}$.

Räkna $f(P_1) = \sqrt{e}\cdot\sqrt{e} - \frac{1}{2}(\sqrt{e})^2 = \underline{\frac{e}{2}}$ (ett kandidat värde)

(2) Randundersökning ; Obs $Bd\,\mathcal{D} = OA \cup AB \cup BC \cup OC$



Ta restriktion f på OA o studera $f|_{OA}$:

Parametrisera OA : $\begin{cases} x = 0 \\ y = t, \quad t \in [0,2] \end{cases}$

Restriktionen $f(0,t) = t\cdot e^0 - 0\cdot t^2 = t = g_1(t),\ t \in [0,2]$.

Studera $g_1(t)$: (i) $g_1' = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ (inga lösningar)

(Obs en variabel funktion)

(ii) $g_1(0) = \underline{0} = f(O)$, $g_1(2) = \underline{2} = f(A)$

två Kandidatvärde.

$f|_{AB}$, AB : $\begin{cases} x = t \\ y = 2, \quad t \in [0,1] \end{cases}$,

$f(t,2) = 2e^t - t\cdot 4 = g_2(t),\ t \in [0,1]$.

(i) $g_2' = 0 \Leftrightarrow 2e^t - 4 = 0$ eller $e^t = 2$ eller

$t = \ln 2 \in (0,1) = \mathrm{Int}\,[0,1]$

Obs!

$g_2(\ln 2) = \underline{4 - 4\ln 2} = f(\ln 2, 2)$ (Kandidatvärde)

(ii) $g_2(0) = \underline{2} = f(A)$, $g_2(1) = \underline{2e - 4} = f(B)$

Kandidat värde

$f|_{BC}$, $BC: \begin{cases} x=1 \\ y=t, \quad t\in[0,2] \end{cases}$

$f(1,t) = t\cdot e - t^2 = g_3(t)$, $t \in [0,2]$

(i) $g_3' = 0 \Leftrightarrow e - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{e}{2} \in (0,2)$

Ohs!

$f(1, \frac{e}{2}) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} = \underline{\frac{e^2}{4}}$ (Kandidat värde)

(ii) $g_3(0) = \underline{0} = f(C)$, $g_3(2) = \underline{2e-4} = f(B)$

(kandidat värde.

$f|_{OC}$, $OC: \begin{cases} x=t \\ y=0, \quad t\in[0,1] \end{cases}$

$f(t,0) = \underline{0}$ (Konstant funktion)

(kandidat värde)

(3) Lista ut alla kandidat värde $\underline{o}$

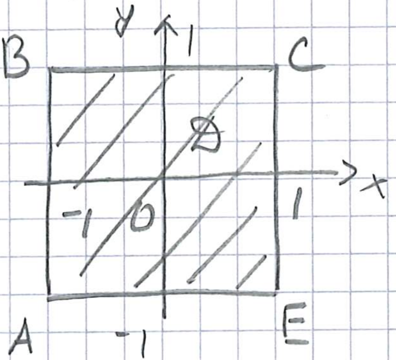
väl största $\underline{o}$ minsta

$\left\{ \frac{e^2}{2}, 0, 2, \underset{\overset{\vee}{0}}{4-4\ln 2}, \underset{\overset{\vee}{0}}{2e-4}, \frac{e^2}{4} \right\}$

Ohs (i) $\min_{\mathcal{D}} f = 0$ antas på sträckan OC.

(ii) $\max_{\mathcal{D}} f = 2$ antas i A.

(6) $f(x,y) = xy + x^2y^2$, $\mathcal{D} = \{|x| \le 1, |y| \le 1\}$.



Obs (i) f är kontinuerlig på $\mathcal{D}$

(ii) $\mathcal{D}$ är kompakt

$\Rightarrow$ f har största o minsta värde

Kandidatjakt

(1) inre stationära punkter

$$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2xy^2 = 0 & (1) \\ x + 2yx^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

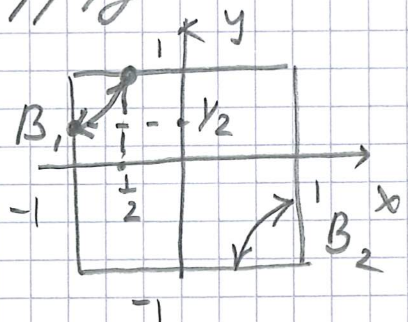
(1): $y(1 + 2xy) = 0$ • om $y = 0$ (2) så är $x = 0$

$P_1(0,0)$ är inre punkt till $\mathcal{D}$

$f(P_1) = \underline{0}$ (Kandidat)

• om $1 + 2xy = 0$ så är även (2) uppfylld.

$1 + 2xy = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$ Rita



Inre stationära punkter på bågarna B_1 o B_2

Obs för varje $P \in B_1$ (eller B_2) har vi

$xy = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(P) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$

(Kandidat)

(2) Randundersökning: $Bd\,\mathcal{D} = AB \cup BC \cup CE \cup AE$

$\underline{f\big|_{AB}}$, $AB: \begin{cases} x = -1 \\ y = t, \quad t \in [-1,1] \end{cases}$

$f(-1,t) = -t + t^2 = g_1(t), \; t \in [-1,1]$

(i) $g_1' = 0 \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \in (-1,1)$ Obs

$f(-1, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \underline{-\frac{1}{4}}$ (Kandidat)

(ii) $f(A) = g_1(-1) = \underline{2}$, $f(B) = g_1(1) = \underline{0}$ (Kandidater)

$f\big|_{BC}$, $BC: \begin{cases} x = t \\ y = 1, \quad t \in [-1,1] \end{cases}$

$f(t,1) = t + t^2 = g_2(t), \; t \in [-1,1]$

(i) $g_2' = 0 \Leftrightarrow 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \in (-1,1)$ Obs

$f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \underline{-\frac{1}{4}}$ (Kandidat)

(ii) $f(B) = g_2(-1) = \underline{0}$, $f(C) = g_2(1) = \underline{2}$ (Kandidater)

<u>Obs</u> symmetri x o y $\Rightarrow$ alla kandidater är funna.

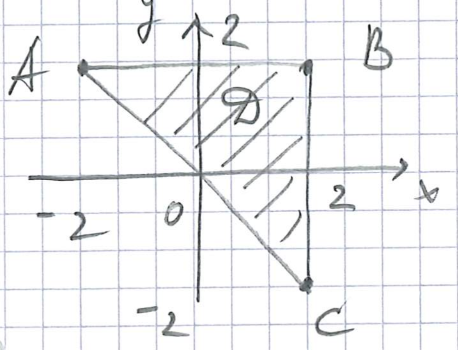
(3) Lista ut o välj max o min

$\{-\frac{1}{4}, 0, 2\}$ <u>Obs</u> (i) $\max_{\mathcal{D}} f = 2$

(2) $\min_{\mathcal{D}} f = -\frac{1}{4}$

4.13 Bestäm max o min av f på D.

(b) $f(x,y) = y^2 + (x^2-1)y$, D är triangeln med hörn $(2,2), (-2,2), (2,-2)$



Obs (i) f är kontin.

(ii) D är kompakt

$\Rightarrow$ f har max o min.

(1) Inre station. punkter:

$$\nabla f = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 & (1) \\ 2y + x^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): $x \cdot y = 0$ • om $x = 0 \xrightarrow{} (2)$ så är $y = \frac{1}{2}$

$P_1(0, \frac{1}{2})$ är en inre punkt till D

$f(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = \underline{-\frac{1}{4}}$ (kandidat)

• om $y = 0 \xrightarrow{} (2)$ så är $x = \pm 1$

$P_2(-1, 0) \notin \text{Int} D$, kastas bort!

$P_3(1, 0)$ är en inre punkt till D

$f(1,0) = \underline{0}$ (kandidat)

(2) Randen: $\text{Bd} D = AB \cup BC \cup AC$

$\underline{f|_{AB}}$, $AB: \begin{cases} x = t \\ y = 2, \ t \in [-2,2] \end{cases}$, $f(t,2) = 4 + (t^2-1) \cdot 2 = g_1(t)$, $t \in [-2,2]$

(i) $g_1' = 0 \Leftrightarrow t = 0 \underset{\underline{\text{Obs}}}{\in} (-2,2)$, $f(0,2) = g_1(0) = \underline{2}$ (kandidat)

(ii) $f(A) = g_1(-2) = \underline{10}$, $f(B) = g_1(2) = \underline{10}$ (kandidat)

$\underline{f\big|_{BC}}$, $BC: \begin{cases} x = 2 \\ y = t, \ t \in [-2,2] \end{cases}$,

$f(2,t) = t^2 + 3t = g_2(t)$, $t \in [-2,2]$

(i) $g_2' = 0 \iff 2t + 3 = 0 \iff t = -3/2 \in (-2,2)$ Obs

$g_2(-3/2) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \underline{-\frac{9}{4}}$ (kandidat)

(ii) $f(B) = \underline{10}$, $f(C) = g_2(-2) = 4 - 6 = \underline{-2}$ (kandidat)

$\underline{f\big|_{AC}}$, $AC = \begin{cases} x = t \\ y = -t, \ t \in [-2,2] \end{cases}$

$f(t,-t) = t^2 + (t^2-1)\cdot(-t) = -t^3 + t^2 + t = g_3(t)$, $t \in [-2,2]$

(i) $g_3' = 0 \iff -3t^2 + 2t + 1 = 0 \iff t_1 = 1$, $t_2 = -1/3 \in (-2,2)$ Obs

$g_3(1) = \overline{1}$ o $g_3(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \underline{-\frac{5}{27}}$

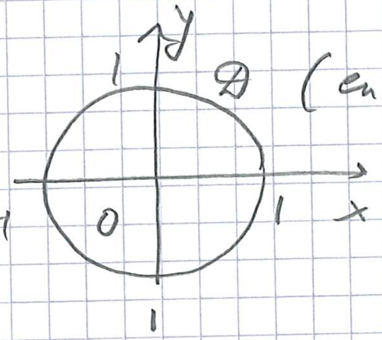
(ii) $\underline{f(A)}$, $\underline{f(C)}$ (kandidater)

(3) Lista ut o välj!

$\left\{ -\frac{1}{4}, 0, 2, 10, -\frac{9}{4}, -2, -\frac{5}{27} \right\}$

$\max_{D} f = 10$ o $\min_{D} f = -9/4$

(c) $f(x,y) = (2x+3y+1)^2, \quad \mathcal{D} = \{x^2+y^2=1\}$



$\mathcal{D}$ (en cirkel med radie 1 o centrum i origo)

<u>Obs</u> (i) f är kontinuerlig på $\mathcal{D}$
(ii) $\mathcal{D}$ är kompakt
$\Rightarrow f$ har max o min.

Notera att $\mathcal{D} = \mathrm{Bd}\,\mathcal{D}$.

<u>Randen:</u> Parametrisera cirkeln med polär vinkel

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$f(\cos\varphi, \sin\varphi) = (2\cos\varphi + 3\sin\varphi + 1)^2 = g(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$

Studera g:

$g' = 0 \Leftrightarrow (2\cos\varphi + 3\sin\varphi + 1)\cdot(-2\sin\varphi + 3\cos\varphi) = 0$

- $2\cos\varphi + 3\sin\varphi + 1 = 0$, <u>Obs</u> $g(\varphi)$ har värde $\underline{0}$ på lsgen till ekvationen $\Rightarrow \min\limits_{[0,2\pi]} g = \min\limits_{\mathcal{D}} f = 0$

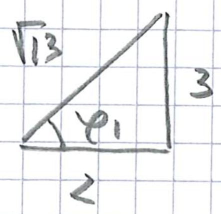
Låt oss lösa ekv: $\sqrt{2^2+3^2}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\cos\varphi + \frac{3}{\sqrt{13}}\sin\varphi\right) = -1$

V.L. $= \sqrt{13}\,\sin\left(\varphi + \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = -1 \Leftrightarrow$

$\sin\left(\varphi + \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \varphi + \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right) + \pi n.$

- $-2\sin\varphi + 3\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \tan\varphi = 3/2$

$\varphi = \arctan\frac{3}{2} + \pi n$, <u>Obs</u> $\underbrace{\arctan\frac{3}{2}}_{\varphi_1}, \underbrace{\arctan\frac{3}{2} + \pi}_{\varphi_2} \in [0, 2\pi]$



$$\Rightarrow \cos\varphi_1 = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$g(\varphi_1) = \left(2\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} + 3\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} + 1\right)^2 = \underline{\left(1+\sqrt{13}\right)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \cos(\varphi_1+\pi) = -\cos\varphi_1 = -2/13 \\ \sin\varphi_2 &= \sin(\varphi_1+\pi) = -\sin\varphi_1 = -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$g(\varphi_2) = \left(2\cdot\frac{(-2)}{\sqrt{13}} + 3\cdot\frac{(-3)}{\sqrt{13}} + 1\right)^2 = \underline{\left(\sqrt{13}-1\right)^2}$$

(två enda kandidatvärde för max)

$$\Rightarrow \max_{x} f = \left(1+\sqrt{13}\right)^2,$$

P.S. det finns andra sätt att lösa problemet.