LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Bitr professor Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TAIU08
Provkod: TEN1

TENTAMEN I MATEMATIK TAIU08/TEN1 (FLERVARIABELANALYS)
2016-01-05 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Undersök gränsvärdena.

   (i) $\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{xy-3x+2y-6}{xy-x+2y-2}$ (1p)
   Lsg. Först gör insättning: $x=-2, y=2$. Vi får $\frac{0}{0}$. Oklart. Andra, använd substitutionen: $u=x+2, v=y-2$. Man får $\frac{u(v-1)}{u(v+1)}=\frac{v-1}{v+1}$. Prova med insättning: $u=0, v=0$. Vi får -1. Det här är gränsvärdet.

   (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2xy^2+y^3}{x^3+x^2y+y^3}$ (2p)
   Lsg: Först gör insättning: $x=0, y=0$. Vi får $\frac{0}{0}$. Oklart. Testa restriktionerna: $U|_{x=0}=\frac{y^3}{y^3}=1\to 1$ då $y\to 0$, och $U|_{y=x}=\frac{4x^3}{3x^3}=\frac{4}{3}\to\frac{4}{3}$ då $x\to 0$. Notera att $1\neq\frac{4}{3}$. Gränsvärdet saknas.

2. (i) Lös följande system av partiella differentialekvationer

$$\begin{cases} z'_x = x^3 + ye^x \\ z'_y = y^2 + e^x \end{cases} \quad (2p).$$

   Lsg. Integrera första ekv m a p x. Vi får: $z(x,y)=\int(ye^x+x^3)dx = ye^x+\frac{x^4}{3}+c(y)$. Derivera det funna utrycket m a p y och jämför derivatan med utrycket från systemet. Man får: $z_y=e^x+c'(y)=y^2+e^x$. Obs $c'(y)=y^2$, så är $c(y)=\frac{y^3}{3}+k$, där k är en godtycklig konstant. Sammanfatta: $z(x,y)=ye^x+\frac{x^4}{3}+\frac{y^3}{3}+k$.

   (ii) Ange den lösning som satisfierar villkoret: $z(1,2)=3$ (1p)
   Lsg. Stoppa in $x=1, y=2$ i svaret på (i). Vi får: $z(1,2)=2e+\frac{1}{4}+\frac{2^3}{3}+k$. Lös ut $k: k=\frac{1}{12}-2e$. Sammanfatta: $z(x,y)=ye^x+\frac{x^4}{3}+\frac{y^3}{3}+\frac{1}{12}-2e$.

3. Betrakta funktionen $f(x,y)=x^3+12xy^2+x^2+4y^2+1$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   Lsg: Obs $f'_x=3x^2+12y^2+2x$ och $f'_y=24xy+8y$. Lös ekv: $\nabla f=\overline{0}$. Börja med ekv $8(3x+1)y=0$. Det finns två fall:
   (a) $y=0$. Leder till två stationära punkter: $P_1(0,0)$ och $P_2(\frac{-2}{3},0)$.
   (b) $x=\frac{-1}{3}$. Leder till två stationära punkter till: $P_3(\frac{-1}{3},\frac{1}{6})$ och $P_4(\frac{-1}{3},\frac{-1}{6})$.

(ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
Lsg. Använd kvadratisk form
$Q(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$ i varje funna punkt P.
Obs $f''_{xx} = 6x + 2, f''_{xy} = 24y, f''_{yy} = 24x + 8$.
$P_1 : Q(h,k) = 2h^2 + 8k^2$, pos. def., P_1 är en str. lok. minpunkt.
$P_2 : Q(h,k) = -2h^2 - 8k^2$, neg. def., P_2 är en str. lok. maxpunkt.
$P_3 : Q(h,k) = 8hk$, indef., P_3 är en sadelpunkt.
$P_4 : Q(h,k) = -8hk$, indef., P_4 är en sadelpunkt.

4. Finn max och min av funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ på mängden K definierad av $z = x^2 + y^2$ och $x + y + z = 1$.

Lsg. Obs (1): K är kompakt och f är kontinuerlig. Så finns extremvärden.

(2): vi har två bivillkor. Inför: $g(x,y) = x^2+y^2-z$ och $h(x,y) = x+y+z$. Notera att extrempunkterna finns bland lösningar till systemet (*):

(1) $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är lin. beroende, (2) $g = 0$, (3) $h = 1$.

Transformera (1) m h a determinant. Obs (*) är ekvivalent till det nya systemet (**):

(1) $(x-y)(1+2z) = 0$, (2) $g = 0$, (3) $h = 1$.

Börja med (1). Det finns två fall:

(a): $x = y$. Leder till två kandidatpunkter: $P_1(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3})$, $P_2(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3})$.
(b): $z = -\frac{1}{2}$. Leder till inga kandidatpunkter.

Obs $f(P_1) = (\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2 + (2+\sqrt{3})^2 = 9 + 5\sqrt{3}$, $f(P_2) = 9 - 3\sqrt{3}$. Sammanfatta: max f $= 9 + 5\sqrt{3}$ och min f $= 9 - 3\sqrt{3}$.

5. Beräkna integralen $\int\int_D (x-y)e^{x+y}\, dxdy$,

där D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(1,1)$ och $(0,2)$.

Lsg. Rita en bild. Använd substitutionen: $u = x - y, v = x + y$. Notera att $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2$. Så är $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$. Dessutom, D_{uv} är en triangel med hörn i punkterna $(0,0), (0,2), (-2,2)$. Nu är integralen I lika med $\frac{1}{2}\int\int_{D_{uv}} ue^v dudv$. Fortsätt $I = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(\int_{-u}^{2} ue^v dv)du = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} ue^2 du - \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} ue^{-u} du = -e^2 - (-ue^{-u} - e^{-u})|_{-2}^{0} = -e^2 - \frac{1}{2}(-1-e^2) = \frac{1}{2}(1-e^2)$.

6. Finn massan av kroppen som definieras $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq |x|$, med densitet $f(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Lsg. Obs massan $M = \int\int\int_K f(x,y,z)dxdydz$. Rita en bild.

Använd sfäriska koordinater: $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$. Kroppens gränser: $0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Notera att $|\frac{\partial(xyz)}{\partial(r\phi\theta)}| = r^2\sin\theta$ och $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Så är $M = \int\int\int_{K_{r\phi\theta}} e^{r^3} r^2 \sin\theta drd\theta d\phi$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\phi \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^1 e^{r^3} r^2 dr = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}(e-1) = \frac{\pi}{3}(e-1)$.