Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Bitr professor Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2016-08-16 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Undersök gränsvärdena.

   (i) $\lim_{(x,y)\to(1,-5)} \frac{10x-y+2xy-5}{15x-2y+3xy-10}$ (1p)
   Lsg. Först gör insättning: $x=1, y=-5$. Vi får $\frac{0}{0}$. Oklart. Andra, använd substitutionen: $u=x-1, v=y+5$. Man får $\frac{v(2u+1)}{v(3u+1)} = \frac{2u+1}{3u+1}$. Prova med insättning: $u=0, v=0$. Man får 1. Det här är gränsvärdet.

   (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2+y^3}{x^3+3x^2y+y^3}$ (2p)
   Lsg: Först gör insättning: $x=0, y=0$. Vi får $\frac{0}{0}$. Oklart. Testa restriktionerna: $U|_{x=0} = \frac{y^3}{y^3} = 1 \to 1$ då $y\to 0$, och $U|_{y=x} = \frac{x^3}{5x^3} = \frac{1}{5} \to \frac{1}{5}$ då $x \to 0$. Notera att $1 \neq \frac{1}{5}$. Det medför att gränsvärdet saknas.

2. (i) Lös följande system av partiella differentialekvationer

$$\begin{cases} z'_x = ye^{xy} + \cos y \\ z'_y = xe^{xy} - x\sin y + 2y \qquad (2p). \end{cases}$$

   Lsg. Integrera första ekv m a p x. Vi får: $z(x,y) = \int z'_x dx = \int (ye^{xy} + \cos y)dx = e^{xy} + x\cos y + c(y)$. Derivera det funna utrycket m a p y och jämför derivatan med utrycket från systemet. Man får: $z'_y = xe^{xy} - x\sin y + c'(y) = xe^{xy} - x\sin y + 2y$. Obs $c'(y) = 2y$, så är $c(y) = y^2 + k$, där k är en godtycklig konstant. Sammanfatta: $z(x,y) = e^{xy} + x\cos y + y^2 + k$.

   (ii) Ange den lösning som satisfierar villkoret: $z(1,0) = 3$ (1p)
   Lsg. Stoppa in $x=1, y=0$ i svaret på (i). Man får: $z(1,0) = e^{1\cdot 0} + 1\cdot\cos 0 + 0^2 + k = 3$. Lös ut $k : k = 1$. Sammanfatta: $z(x,y) = e^{xy} + x\cos y + y^2 + 1$.

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = 1 + 15(x+y) - 3yx^2 - x^3 - y^3$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   Lsg: Obs $f'_x = 15 - 6xy - 3x^2$ och $f'_y = 15 - 3x^2 - 3y^2$. Lös ekv: $\nabla f = \overline{0}$. Obs att $6xy = 3y^2$ eller $y(2x-y) = 0$. Det finns två fall:
   (a) $y = 0$. Leder till två stationära punkter: $P_1(\sqrt{5}, 0)$ och $P_2(-\sqrt{5}, 0)$.
   (b) $2x = y$. Leder till två stationära punkter till: $P_3(1,2)$ och $P_4(-1,-2)$.

(ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
Lsg. Använd kvadratisk form
$Q(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$ i varje funna punkt P.
Obs $f''_{xx} = -6y - 6x, f''_{xy} = -6x, f''_{yy} = -6y$.
$P_1 : Q(h,k) = -6\sqrt{5} \cdot ((h+k)^2 - k^2)$, indef., P_1 är en sadelpunkt.
$P_2 : Q(h,k) = 6\sqrt{5} \cdot ((h+k)^2 - k^2)$, indef., P_2 är en sadelpunkt.
$P_3 : Q(h,k) = -2((3h+k)^2 + 5k^2)$, neg. def., P_3 är en str. lok. maxpunkt.
$P_4 : Q(h,k) = 2((3h+k)^2 + 5k^2)$, pos. def., P_4 är en str. lok. minpunkt.

4. Beräkna integralen $\int_0^1 (\int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}}\ dx)dy$.

Lsg. Obs $I = \int_0^1 (\int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}}\ dx)dy = \int_{y=0}^{y=1} (\int_{x=\sqrt{y}}^{x=1} e^{\frac{y}{x}}\ dx)dy$. Rita en bild med linjerna $y = 0, y = 1, x = \sqrt{y}, x = 1$ eller $y = 0, y = 1, y = x^2, x = 1$.

M h a bilden kasta om variablerna x, y. Man får $I = \int_0^1 (\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\ dy)dx$. Fortsätt att integrera: $I = \int_0^1 xe^{\frac{y}{x}}|_0^{x^2} dx = \int_0^1 (xe^x - x)dx =$
$(xe^x - e^x - \frac{x^2}{2})|_0^1 = \frac{1}{2}$.

5. Finn max och min av funktionen $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ på mängden K definierad av $z = x^2 + y^2$ och $x - y - z = -1$.

Lsg. Obs (1): K är definierad av $z = x^2 + y^2$, $-x + y + z = 1$ och K är kompakt (rita en bild). Dessutom är f kontinuerlig. Så finns extremvärden.

(2): vi har två bivillkor. Inför: $g(x,y) = x^2 + y^2 - z$ och $h(x,y) = -x + y + z$.

Notera att extrempunkterna finns bland lösningar till systemet (*):

(1) $\nabla f, \nabla g, \nabla h$ är lin. beroende, (2) $g = 0$, (3) $h = 1$.

Transformera (1) m h a determinant. Obs (*) är ekvivalent till det nya systemet (**):

(1) $(x+y)(1+2z) = 0$, (2) $g = 0$, (3) $h = 1$.

Börja med (1). Det finns två fall:

(a): $x = -y$. Leder till två kandidatpunkter: $P_1(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3})$, $P_2(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3})$.

(b): $z = -\frac{1}{2}$. Leder till inga kandidatpunkter.

Obs $f(P_1) = (\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2 + (2+\sqrt{3})^2 = 9 + 5\sqrt{3}$, $f(P_2) = 9 - 3\sqrt{3}$. Sammanfatta: max f $= 9 + 5\sqrt{3}$ och min f $= 9 - 3\sqrt{3}$.

6. Finn massan av kroppen som definieras $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq |z|$, med densitet $f(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Lsg. Obs massan $M = \int\int\int_K f(x,y,z)dxdydz$. Använd substitutionen: $x = v, y = w, z = u$. Obs att $|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}| = 1$ och $M = \int\int\int_{K'} f(u,v,w)dudvdw$, där K' definieras $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1,\ v \geq |u|$. Rita en bild.

Använd sfäriska koordinater: $u = r\sin\theta\cos\phi, v = r\sin\theta\sin\phi, w = r\cos\theta$. Kroppens gränser: $0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Notera att $|\frac{\partial(uvw)}{\partial(r\phi\theta)}| = r^2 \sin\theta$ och $u^2 + v^2 + w^2 = r^2$.

Så är $M = \int\int\int_{K_{r\phi\theta}} e^{r^3} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\phi \cdot \int_0^\pi \sin\theta d\theta \cdot \int_0^1 e^{r^3} r^2 dr = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}(e-1) = \frac{\pi}{3}(e-1).$