Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Bitr professor Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2016-10-24 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $P(1, -2, 4)$, där $f(x, y) = x^2y^2 + x + 2y + 3$.

   Svar: Obs $1^2(-2)^2+1+2(-2)+3 = 4+1-4+3 = 4$. Så ligger punkten P på ytan. Repetera att planets ekv är

   $z = f(1, -2) + f'_x(1, -2)(x - 1) + f'_y(1, -2)(y - (-2))$.

   Beräkna $f(1, -2) = 4$, $f'_x(x, y) = 2xy^2 + 1$, $f'_x(1, -2) = 2(-2)^2 + 1 = 9$, $f'_y(x, y) = 2x^2y + 2$, $f'_y(1, -2) = 2(-2) + 2 = -2$. Så är planets ekv $z = 4 + 9(x - 1) + (-2)(y + 2)$ eller $9x - 2y - z - 9 = 0$

2. Transformera uttrycket $U = \frac{1}{y} \cdot f'_x - f''_{xy}$ genom att sätta

   $u = 3y$ och $v = xy$. Funktionen f har kontinuerliga partiella derivator av ordning 2.

   Svar: Obs $u'_x = 0$, $u'_y = 3$, $v'_x = y$ och $v'_y = x$. Fortsätt $f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u \cdot 0 + f'_v \cdot y = y \cdot f'_v$ och $f''_{xy} = (f'_x)'_y = (y \cdot f'_v)'_y = 1 \cdot f'_v + y \cdot (f'_v)'_y = f'_v + y \cdot ((f'_v)'_u \cdot u'_y + (f'_v)'_v \cdot v'_y) = f'_v + y \cdot (f''_{vu} \cdot 3 + f''_{vv} \cdot x) = f'_v + f''_{vu} \cdot (3y) + f''_{vv} \cdot (xy) = f'_v + f''_{vu} \cdot u + f''_{vv} \cdot v$. Sätt in funna uttrycken i U. Man får $U = -u \cdot f''_{vu} - v \cdot f''_{vv}$.

3. Betrakta funktionen $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y + 7$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   Svar: Obs $f'_x = 3x^2+3y^2-15$ och $f'_y = 6y-12$. Lös ekv $\nabla f = \overline{0}$ eller systemet $x^2 + y^2 = 5$ (1) och $xy = 2$ (2). Notera att $(x + y)^2 = 9$.
   Man får två fall:
   (a) $x + y = -3$ och $xy = 2$, (b) $x + y = 3$ och $xy = 2$ som ger 4 stationära punkter $P_1(2, 1), P_2(1, 2)$, $P_3(-2, -1)$ och $P_4(-1, -2)$.

   (ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
   Svar: Använd kvadratiska former i de funna punkterna. Repetera att för en punkt P motsvarande kvadratisk form $Q(h, k)$ är
   $f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$.
   Notera att $Q_1(h, k) = 12h^2 + 12hk + 12k^2 = 12((h + \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2)$ är pos. definit. Så är P_1 en str. lok. min.

$Q_2(h,k) = 6h^2 + 24hk + 6k^2 = 6((h+2k)^2 - 3k^2)$ är indefinit. Så är P_2 en sadelpunkt.

$Q_3(h,k) = -(12h^2 + 12hk + 12k^2) = -12((h + \frac{k}{2})^2 + \frac{3}{4}k^2)$ är neg. definit. Så är P_3 en str. lok. max.

$Q_4(h,k) = -(6h^2 + 24hk + 6k^2) = -6((h+2k)^2 - 3k^2)$ är indefinit. Så är P_4 en sadelpunkt.

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen

   $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3y + 4$

   på cirkeln $x^2 + y^2 = 9$.

   Svar: Obs ett bivillkor. Sätt $g = x^2 + y^2$. Notera att målfunktionen f är kontinuerlig och cirkeln $x^2 + y^2 = 9$ är kompakt. Extremvärden antas och extrempunkterna satisfierar systemet:

   (1) $\nabla f, \nabla g$ är parallella och (2) $g = 9$ eller

   (3) $y^2 - x^2 + 3x = 0$ och (4) $x^2 + y^2 = 9$.

   Fortsätt: (2) - (1) : $2x^2 - 3x = 9$ eller $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Man får $x_1 = 3$ och $x_2 = -\frac{3}{2}$.

   Om $x = 3$ så är $y = 0$ (testa insättning i (4)). Man får en kandidat $P_1(3,0)$.

   Om $x = -\frac{3}{2}$ så är $y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Man får $P_2(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ och $P_2(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$. Notera att $f(P_1) = 13$, $f(P_2) = 13 - \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (min) och $f(P_3) = 13 + \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (max).

5. Beräkna arean av området $D = \{(x,y) : |x+5y| + |3x - 7y| \leq 6\}$.

   Svar: Obs arean A är $\int\int_D 1dxdy$. Använd substitutionen: $u = x + 5y$ och $v = 3x - 7y$. Notera att $\frac{\partial xy}{\partial uv} = \frac{1}{\frac{\partial uv}{\partial xy}} = -\frac{1}{22}$. så är $A = \int\int_{D'} \frac{1}{22} dudv$, där D' definieras av $|u| + |v| \leq 6$. Notera att

   $A = \frac{1}{22} \cdot \int\int_{D'} 1dudv = \frac{1}{22} \cdot$ arean av D' och D' är en kvadrat med sidan $6\sqrt{2}$. Så är $A = \frac{1}{22} \cdot (6\sqrt{2})^2 = \frac{36}{11}$.

6. Beräkna integralen $\int\int\int_\Omega xyzdxdydz$, där

   $\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

   Svar: Använd sfäriska koordinater: $x = r\sin\psi\cos\phi, y = r\sin\psi\sin\phi$ och $z = r\cos\psi$. Notera att $I = \int\int\int_\Omega xyzdxdydz = \int\int\int_{\Omega_{r\phi\psi}} (r\sin\psi\cos\phi) \cdot (r\sin\psi\sin\phi) \cdot (r\cos\psi) \cdot (r^2\sin\psi) drd\phi d\psi$, där

   $\Omega_{r\phi\psi}$ definieras av $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$ och $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$.

   Vidare, $I = (\int_0^{\sqrt{2}} r^5 dr) \cdot (\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\phi\sin\phi d\phi) \cdot (\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\psi)^3 \cos\psi d\psi) = \frac{2^3}{6} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{4}) = -\frac{1}{6}$.