Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Bitr professor Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2017-08-15 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm Taylorpolynomen av ordningen 1 och 2 i punkten (-1,1) till funktionen $f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2 + 2)$

   Använd $h = x_1 + 1$ och $k = x_2 - 1$ för att skriva ner polynomen.

   Svar: Obs $f'_{x_1} = \frac{2x_1}{x_1^2+x_2+2}$, $f'_{x_2} = \frac{1}{x_1^2+x_2+2}$, etc

   $P_1(h,k) = 2\ln 2 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}k$, $P_2(h,k) = P_1(h,k) + \frac{1}{8}(h^2 + hk - \frac{1}{4}k^2)$

2. Transformera uttrycket $U = \frac{1}{y} \cdot z'_x - z''_{xy} + 3$ genom att införa nya variablerna $u = ky$ och $v = xy$, där k är en konstant $\neq 0$.

   Funktionen z har kontinuerliga partiella derivator av ordning 2.

   Svar: $z'_x = yz'_v$ och $z''_{xy} = uz''_{vu} + vz''_{vv} + z'_v$.

   $U = -uz''_{vu} - vz''_{vv} + 3$

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + y^2 + xy + 5$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   Svar: $P_1(0,0)$ och $P_2(-\frac{7}{6}, \frac{7}{12})$

   (ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
   Svar: $P_1 : Q_1(h,k) = 4h^2 + 2hk + 2k^2 = (2h + \frac{k}{2})^2 + \frac{7}{4}k^2$, pos. def.,
   P_1 är en lok. min.punkt
   $P_2 : Q_2(h,k) = -3h^2 + 2hk + 2k^2 = -3(h - \frac{k}{3})^2 + \frac{7}{3}k^2$, indef.,
   P_2 är en sadelpunkt

4. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = 9x^2 + y^2 - 4y + 1$ på $D = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 3,\ x \geq 0\}$.

   Svar: Området är en triangel med hörn $(0,-3), (0,3), (3,0)$.

   Obs inga inre stationära punkter.

   Randundersökningen ger följande värden $-3, 22, -2, -\frac{21}{10}, 82, \frac{39}{2}$.

   Sammanfatta: $\max f = 82$ antas i $(3,0)$ och $\min f = -3$ antas i $(0,2)$

5. Finn volymen av kroppen som ges av olikheterna
$x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - 4x - 2y$.

Svar: Volymen $V = \int\int_D (4 - 4x - 2y - (x^2 + y^2))dxdy =$
$\int\int_D (9 - (x+2)^2 - (y+1)^2)dxdy$, där
$D = \{(x,y) : (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 3^2\}$, eller
$V = \int\int_{D'} (9 - u^2 - v^2)$, där $u = x+2, v = y+1$ och
$D' = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 3^2\}$.
Till slut får man att $V = \frac{81}{2}\pi$

6. Beräkna integralen av $\int\int_D \frac{x^3 dxdy}{1+y^5}$, där
$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2y \leq 1\}$.

Svar: Området D är en en triangel med hörn $(0,0), (0,\frac{1}{2}), (1,\frac{1}{2})$.
$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (\int_0^{2y} \frac{x^3 dxdy}{1+y^5} dx)dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+y^5} \frac{x^4}{4}\Big|_0^{2y} dy =$
$4\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y^4}{1+y^5} dy = |t = 1 + y^5| = \frac{4}{5} \ln \frac{33}{32}$