Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2017-10-23 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Undersök gränsvärdena.

   (i) $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy+x+y+x^2}{xy+2x+y+2}$ (1p)

   Svar: Insättning $x=-1, y=2$ i uttrycket ger $\frac{0}{0}$. Oklart. Prova med substitutionen: $x+1=u$, $y-2=v$. Man får $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy+x+y+x^2}{xy+2x+y+2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{v+1+u}{v+4} = \frac{1}{4}$ (förkortning och insättning).

   (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+2x^3y+y^4}{x^4-x^2y^2+y^4}$ (2p)

   Svar: Sätt $U = \frac{x^4+2x^3y+y^4}{x^4-x^2y^2+y^4}$. Observera att $U|_{y=0} = 1 \to 1$ då $x \to 0$. Om gränsvärdet finns så är det lika med 1.

   Vidare, $U|_{y=x} = 4 \to 4$ då $x \to 0$. Om gränsvärdet finns så är det lika med 4. Därför att $1 \neq 4$, gränsvärdet finns ej.

2. Lös ekv $z''_{xx} - z''_{yy} = 1$ genom att införa nya variabler $u = x+y$ och $v = x-y$ och transformera VL.

   Svar: Transformera ekv till de nya variablerna u, v.

   Obs $z'_x = z'_u + z'_v$, $z'_y = z'_u - z'_v$ och $z''_{xx} = (z'_x)'_x = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$, $z''_{yy} = (z'_y)'_y = z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}$. Stoppa in de funna uttrycken i ekv: $z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv} - (z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv}) = 1$ eller $4z''_{uv} = 1$ eller $z''_{uv} = \frac{1}{4}$.

   Integrera sista ekv. Först m a p v: $z'_u = \int \frac{1}{4} dv = \frac{1}{4}v + c(u)$.

   Sedan m a p u: $z(u,v) = \int(\frac{1}{4}v + c(u))du = \frac{1}{4}vu + A(u) + B(v)$, där $A(u) : A'(u) = c(u)$. Går tillbacka till x, y:

   $z(x,y) = \frac{1}{4}(x+y)(x-y) + A(x+y) + B(x-y)$.

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2y - 15x - 15y + 2$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)

   Svar: Lös ekv: $\nabla(f) = \overline{0}$ och få fram följande punkter: $P_1(\sqrt{5}, 0), P_2(-\sqrt{5}, 0), P_3(1,2), P_4(-1,-2)$.

   (ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)

   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.

Svar: $P_1 : Q_1(h,k) = 6\sqrt{5}h^2 + 12\sqrt{5}hk = 6\sqrt{5}((h+k)^2 - k^2)$, indefinit. Så är P_1 en sadelpunkt.

$P_2 : Q_2(h,k) = -6\sqrt{5}h^2 - 12\sqrt{5}hk = -6\sqrt{5}((h+k)^2 - k^2)$, indefinit. Så är P_2 en sadelpunkt.

$P_3 : Q_3(h,k) = 18h^2 + 12hk + 12k^2 = 2(9h^2 + 6hk + 6k^2) = 2((3h+k)^2 + 5k^2)$, pos. definit. Så är P_3 en str. lok. minimipunkt.

$P_4 : Q_4(h,k) = -18h^2 - 12hk - 12k^2 = -2(9h^2 + 6hk + 6k^2) = -2((3h+k)^2 + 5k^2)$, neg. definit. Så är P_4 en str. lok. maximipunkt.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^2y + 3$

   på kurvan $2x^4 + y^4 = 48$.

   Tips. Observera ett bivillkor.

   Svar: Notera att kurvan är kompakt och funktionen är kontinuerlig. Det medför att extremvärden finns.

   Därför att vi har ett bivillkor, ligger extrempunkter bland lösningar till systemet (*): $\nabla(f), \nabla(g)$ är lin. beroende (1), $g = 48$ (2), där $g = 2x^4 + y^4$.

   Systemet (*) kan transformeras till systemet (**): $x(y^4 - x^4) = 0$ (3) och $2x^4 + y^4 = 48$ (4).

   Obs att $y^4 - x^4 = (y-x)(y+x)(y^2+x^2)$.

   Systemet (**) har följande lösningar: $P_1(0, 2\sqrt[4]{3}), P_2(0, -2\sqrt[4]{3})$,

   $P_3(2,2), P_4(-2,-2)$, $P_5(-2,2), P_6(2,-2)$.

   Beräkna kandidatvärden: $f(P_1) = f(P_2) = 3$, $f(P_3) = f(P_5) = 11$ och $f(P_4) = f(P_6) = -5$. Nu plockar vi fram största och minsta.

   Så är $\max f = 11$ och $\min f = -5$.

5. Beräkna arean av $D = \{(x,y) : |2x+3y| + |3x-2y| \leq 6\}$.

   Tips. Tänk på ett passande variabelbyte.

   Svar: Arean A av D är lika med $\int\int_D 1dxdy$. Använd substitutionen: $u = 2x+3y, v = 3x-2y$. Följ substitutionsformeln. Obs $D_{uv} = \{(u,v) : |u| + |v| \leq 6\}$ och $|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}| = \frac{1}{13}$. Så är $A = \frac{1}{13}\int\int_{D_{uv}} 1dudv = \frac{1}{13} \cdot$ arean av $D_{uv} = \frac{72}{13}$.

6. Finn massan av den kropp Ω med densitet $f(x,y,z) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ som begränsas av paraboloiden $x^2+y^2 = 4-z$, cylindern $3 = x^2+y^2$ och x,y-planet.

   Svar: Massan M av kroppen Ω är lika med $\int\int\int_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int\int_{x^2+y^2\leq 3}(\int_0^{4-x^2-y^2}\sqrt{1+x^2+y^2}dz)dxdy =$

   $\int\int_{x^2+y^2\leq 3}(4-x^2-y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$. Använd polära koordinater: $x = r\cdot\cos\phi, y = r\cdot\sin\phi$. Då är $M = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\sqrt{3}}(4-r^2)\sqrt{1+r^2}rdr)d\phi = 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{3}}(4-r^2)\sqrt{1+r^2}rdr$. Fortsätt med substitutionen $t = 1+r^2$. Notera att $dt = 2rdr$. Man får $M = \pi\cdot\int_{r=0}^{r=\sqrt{3}} t^{\frac{1}{2}}(5-t)dt =$

   $\pi\cdot\int_{r=0}^{r=\sqrt{3}}(5\cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}})dt = \pi\cdot(\frac{5\cdot t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}})_{r=0}^{r=\sqrt{3}} = \pi\cdot\frac{164}{15}$.