Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Bitr professor Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2018-01-05 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Betrakta ytan $x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - yz + 3x + 2z + a = 0$.

   (i) Punkten $P(2, -1, 3)$ ligger på ytan. Vad är a lika med? (1p)
   Svar: Sätt in punkten P i ekvationen. Man får $a = -4$

   (ii) Ange en normalvektor till ytan i punkten P (1p)
   Svar: Observera att $\nabla F(P) \perp F = 0$, där $F(x, y, z) = x^2+2y^2-z^2+4xy-yz+3x+2z-4$. Så är $\nabla F = (2x+4y+3, 4x+4y-z, -y-2z+2)$ och $\nabla F(P) = (3, 1, -3)$

   (iii) Finn ekvationen för tangentplanet till ytan i punkten P (1p)
   Svar: Planetsekvation är $3(x - 2) + (y - (-1)) + (-3)(z - 3) = 0$ eller $3x + y - 3z + 4 = 0$

2. Lös ekv $z''_{xx} - 4z''_{yy} = x$ genom att införa nya variabler $u = x + \frac{1}{2}y$ och $v = x - \frac{1}{2}y$ och transformera VL.

   Svar: Notera att $z'_x = z'_u + z'_v$, $z''_{xx} = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$ coh $z'_y = \frac{1}{2}(z'_u - z'_v)$, $z''_{xx} = \frac{1}{4}(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv})$.

   Sätt in uttrycken i ekvationen: $4z''_{uv} = x(u, v)$ eller $4z''_{uv} = \frac{u+v}{2}$ eller $z''_{uv} = \frac{u+v}{8}$.

   Integrera två gånger: $z'_u = \int z''_{uv}dv = \int \frac{u+v}{8}dv = \frac{1}{8}(uv + \frac{v^2}{2}) + c(u)$,

   $z(u, v) = \int z'_u du = \int (\frac{1}{8}(uv+\frac{v^2}{2})+c(u))du = \frac{1}{16}(u^2v+vu^2)+A(u)+B(v)$.

   Få fram $z(x, y)$:

   $z(x, y) = \frac{1}{16}(x^2 - \frac{1}{4}y^2)2x + A(x + \frac{1}{2}y) + B(x - \frac{1}{2}y) = \frac{1}{8}(x^2 - \frac{1}{4}y^2)x + A(x + \frac{1}{2}y) + B(x - \frac{1}{2}y)$.

3. Betrakta funktionen $f(x, y) = y^3 + 3yx^2 - 12x - 15y + 1$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   Svar: Lös ekvationen: $\nabla f = \overline{0}$ och få fram punkterna:
   $P_1(1, 2), P_2(-1, -2), P_3(2, 1), P_4(-2, -1)$.

   (ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
   Svar: Använd kvadratiska former i punkter P:

$Q(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$,

$P_1 : Q(h,k) = 12h^2 + 12hk + 12k^2 = 12((h + \frac{k}{2})^2 + \frac{3k^3}{4})$.

Formen är pos. definit och punkten är en str. lok. minimipunkt.

Analogt, P_2, formen är neg. definit och punkten är en str. lok. maximipunkt.

$P_3 : Q(h,k) = 6h^2 + 24hk + 6k^2 = 6((h+2k)^2 - 3k^2)$. Formen är indefinit, punkten är en sadelpunkt.

Analogt P_4, formen är indefinit, punkten är en sadelpunkt.

4. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x^2y + x^2 + 1$

   på kurvan $2x^4 + (y+1)^4 = 48$.

   Tips. Observera ett bivillkor.

   Svar: Observera att funktionen är kontinuerlig på kurvan och kurvan är kompakt. Så extremvärdena finns.

   Notera vidare att extrempunkter hittar man bland lösningar till systemet: $\nabla f, \nabla g$ är lin. beroende (1), $g = 48$ (2),

   där $g(x,y) = 2x^4 + (y+1)^4$.

   Man får sex kandidatpunkter och sedan väljer max och min vilka är 9 och -7.

5. Beräkna integralen $I = \int_0^2 (\int_{3y}^6 e^{-4x^2} dx) dy$.

   Svar: Rita området först. Sedan beräkna: $I = \int_0^6 (\int_0^{\frac{x}{3}} e^{-4x^2} dy) dx = \frac{1}{24}(1 - e^{-144})$.

6. Finn massan av den kropp Ω med densitet $f(x,y,z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ som begränsas av paraboloiden $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$, cylindern $5 = x^2 + y^2$ och x,y-planet.

   Svar: $M = \int\int\int_\Omega f(x,y,z) dxdydz$. Rita figuren. Fortsätt räkna:

   $M = \int\int_{x^2+y^2 \le 5} (x^2+y^2+1)\sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy = |$ polära koordinater $| = 2\pi \int_0^{\sqrt{5}} (1 + r^2)\sqrt{1 + r^2} r dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{5}} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} r dr = \frac{2\pi}{5}(6^{\frac{5}{2}} - 1)$.