Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Bitr professor Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

# Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 ( Flervariabelanalys )
2018-08-21 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Undersök gränsvärdena.

   (i) $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{x^2y+2xy+4x+2x^2}{3xy+6x+5y+10}$ (1p)
   Svar: Obs att insättning av 1 och $-2$ ger $\frac{0}{0}$. Utveckla utrycket under lim: $\frac{x^2y+2xy+4x+2x^2}{3xy+6x+5y+10} = \frac{(y+2)(x^2+2x)}{(y+2)(3x+5)} = \frac{x^2+2x}{3x+5}$. Stoppa in 1 och $-2$ i det nya uttrycket och få svar.
   $\frac{3}{8}$

   (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+2x^3y+y^4}{x^4-3xy^3+y^4}$ (2p)
   Svar: Obs att insättning av 0 och 0 ger $\frac{0}{0}$. Testa två riktningar som leder till origo: en - längs $y$-axeln, andra - längs bissektrisen av första och tredje kvadranterna. Kalla utrycket under lim som $U$. Ta restriktion av $U$ över parametriserat $y$-axeln:
   $U|_{x=0,y=y} = \frac{y^4}{y^4} = 1 \to 1$ då $y \to 0$.
   Ta restriktion av $U$ över parametriserat bissektrisen:
   $U|_{x=x,y=x} = \frac{x^4+2x^4+x^4}{x^4-3x^4+x^4} = -4 \to -4$ då $x \to 0$.
   Obs att $1 \neq -4$. Så
   saknas gränsvärdet.

2. Bestäm alla funktioner $z(x,y)$ som satisfierar ekv
   $z'_x - \frac{1}{x} \cdot z'_y = 2x, x > 0,$
   genom att införa nya variabler $u = x$ och $v = xe^y$.
   Svar: Obs att $z'_x = z'_u + z'_v e^y$ och $z'_y = z'_v xe^y$. Insättningen av funna uttryck i ekv ger ekv $z'_u = 2x$ eller $z'_u = 2u$.
   Integrera sista ekv m a p $u$: $z(u,v) = \int 2udu = u^2 + c(v)$. Så är
   $z(x,y) = x^2 + c(xe^y)$, där $c(\cdot)$ är en deriverbar funktion

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = (x^2+y^2-12) \cdot e^{-x-y-5}$.

   (i) Finn alla stationära punkter till $f$ (1p)
   Svar: Lös ekv $\nabla f = \overline{0} <=> \begin{cases} 2x - (x^2+y^2-12) = 0 \\ 2y - (x^2+y^2-12) = 0. \end{cases}$

Obs att $y = x$. Det leder till ekv $x^2 - x - 6 = 0$ med två rötter 3 och $-2$.

Vi får två stationära punkter:

$P_1(3,3)$ och $P_2(-2,-2)$

(ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)

Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.

Svar: Obs att $f''_{xx} = (x^2 + y^2 - 4x - 10)e^{-x-y-5}$,

$f''_{yy} = (x^2 + y^2 - 4y - 10)e^{-x-y-5}$ och

$f''_{xx} = (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 12)e^{-x-y-5}$.

Kvadratiska formen i en punkt $P$:

$Q(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$.

Betrakta $P_1$:

$Q(h,k) = -4e^{-11}(h^2 + 3hk + k^2) = -4e^{-11}((h + \frac{3k}{2})^2 - \frac{5k^2}{4})$.

Kvadratiska formen är indefinit.

Betrakta $P_2$:

$Q(h,k) = e^{-1}(6h^2 + 8hk + 6k^2) = 6e^{-1}((h + \frac{2k}{3})^2 + \frac{5k^2}{9})$.

Kvadratiska formen är pos. definit.

Så är

$P_1$ en sadelpunkt och $P_2$ en str. lok. minimipunkt

4. Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x,y,z) = x + y + z$

på mängden $M$ definierad av $x^2 + y^2 = z$ och $x - 2y + z + 1 = 0$.

Tips. Observera två bivillkor.

Svar: Inför: $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$, $h(x,y,z) = x - 2y + z$ och

$$D : \begin{cases} g = 0 \\ h = -1. \end{cases}$$

Obs $f$ är kontinuerlig och $D$ är kompakt. Så existerar max och min av $f$.

Extrempunkterna finns bland lösningar till systemet:

$$\begin{cases} \nabla f, \nabla g, \nabla h \text{ är lin. beroende} \\ g = 0, h = -1. \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 - z = 0 \\ x - 2y + z = -1. \end{cases}$$

Det finns två lösningar:

$P_1(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ och $P_2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$\max f = \frac{7}{2}$ antas i punkten $P_1$, och $\min f = \frac{1}{2}$ antas i punkten $P_2$

5. Beräkna dubbelintegralen $\int\int_D (2x + y) \cdot sin(3x)\ dxdy$,

där $D$ ges av olikheterna $-1 \le 2x + y \le 1$, $0 \le x - y \le 1$.

Svar: Använd substitutionen: $u = 2x + y$ och $v = x - y$.

Obs det nya området är $-1 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$,

den sammansatta funktionen är $u \sin(u + v)$ och

funktionaldeterminanten är $\frac{1}{3}$.

Så är integralen lika med $\frac{1}{3} \cdot (1 - \sin 2 - \cos 2)$

6. Finn massan av den kropp $\Omega$ med densitet $f(x, y, z) = \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}$ som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ och $z \geq 0$.

   Svar: Använd sfariska koordinater.

   Obs $0 \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ och $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$.

   Den sammansatta funktionen är $\frac{r \cos \psi}{1+r^2}$.

   Funktionaldeterminanten är $r^2 \sin \psi$.

   Massan är $\pi \cdot (1 - \frac{1}{2} \ln 3)$