Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2018-10-26 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm Taylorpolynom P_1 och P_2 av ordning 1 och 2 i punkten (-1,1) till funktionen $f(x,y) = x^2y^2 - 2x^2y + 3xy^2 - 4$.

   Använd $h = x+1$ och $k = y-1$ för att skriva ner polynomen.

   Svar: Räkna: $f'_x(x,y) = 2xy^2 - 4xy + 3y^2$, $f'_y = 2x^2y - 2x^2 + 6xy$,

   $f''_{xx} = 2y^2 - 4y$, $f''_{xy} = 4xy - 4x + 6y$, $f''_{yy} = 2x^2 + 6x$.

   Då får man

   $P_1(h,k) = -8 + 5h - 6k$ och $P_2(h,k) = -8 + 5h - 6k - h^2 + 6hk - 2k^2$

2. Bestäm alla funktioner $z(x,y)$ som satisfierar ekv

   $z''_{xx} + z''_{xy} - 6z''_{yy} = 1$ genom att införa nya variablerna

   $u = x + \frac{1}{2}y$ och $v = x - \frac{1}{3}y$.

   Svar: Transformera ekv till de nya variablerna:

   $z''_{xx} = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$, $z''_{xy} = \frac{1}{2}z''_{uu} + \frac{1}{6}z''_{uv} - \frac{1}{3}z''_{vv}$, $z''_{yy} = \frac{1}{4}z''_{uu} - \frac{1}{3}z''_{uv} + \frac{1}{9}z''_{vv}$.
   Stoppa in funna uttryck i ekv:

   $\frac{25}{6}z''_{uv} = 1$ $(*)$.

   Lös ekv $(*)$. Integrera två gånger: $z = \frac{6}{25}uv + C(u) + D(v)$.

   Nu får vi lösningen till första ekv:

   $z(x,y) = \frac{6}{25}(x + \frac{1}{2}y)(x - \frac{1}{3}y) + C(x + \frac{1}{2}y) + D(x - \frac{1}{3}y)$, där $C(\cdot)$ och $D(\cdot)$ är godtyckliga C^2-funktioner.

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + y^3 + 2018$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   Svar: $\nabla f = \overline{0}$ eller $f'_x = 2x + y = 0$ och $f'_y = x + 4y + 3y^2 = 0$. Stoppa in $y = -2x$ i andra ekv: $12x^2 - 7x = 0$ eller $x_1 = 0$ och $x_2 = \frac{7}{12}$. Man får två stationära punkter: $P_1(0,0)$ och $P_2(\frac{7}{12}, -\frac{7}{6})$

   (ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
   Svar: Räkna: $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 1$ och $f''_{yy} = 4 + 6y$.
   Kvadratiska formen i P_1: $Q(h,k) = 2h^2 + 2hk + 4k^2 =$
   $2((h + \frac{k}{2})^2 + \frac{7}{4}k^2)$, pos. definit ty $Q \geq 0$, och $Q = 0$ omm $h = k = 0$.

Kvadratiska formen i P_2: $Q(h,k) = 2h^2 + 2hk - 3k^2 =$
$2((h+\frac{k}{2})^2 - \frac{7}{4}k^2)$, indefinit ty $Q(-\frac{1}{2},1) < 0$ och $Q(1,0) > 0$.
Sammanfatta: $P_1(0,0)$ är en str. lok. minimipunkt och $P_2(\frac{7}{12}, -\frac{7}{6})$ en sadelpunkt

4. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = xy^2 + 3y - x + 3$ på det område D som ges av olikheterna $0 \le y \le -x \le 2$.

   Svar: Obs att D är en sluten triangel med hörn $O(0,0)$, $A(-2,0)$ och $B(-2,2)$. Området är kompakt och funktionen är kontinuerlig. Så finns extremvärden.

   Inre stationära punkter: $\nabla f = \overline{0}$ eller $f'_x = y^2 - 1 = 0$ och $f'_y = 2xy + 3 = 0$. Det finns två lösningar hos systemet: $P_1(\frac{3}{2}, -1)$ och $P_2(-\frac{3}{2}, 1)$.

   Obs P_1 ligger utanför D (kastas bort) och $P_2 \in IntD$. Så är P_2 en kandidatpunkt och $f(P_2) = 6$.

   Randundersökning:

   $OA : x = t, y = 0, t \in [-2,0]$ och $f_{OA} = -t + 3, t \in [-2,0]$. Kandidatvärden: $f(O) = 3$ och $f(A) = 5$.

   $AB : x = -2, y = t, t \in [0,2]$ och $f|_{AB} = -2t^2 + 3t + 5 = g(t), t \in [0,2]$.

   Lös ekv: $g'(t) = 0$ eller $-4t + 3 = 0$. Man får $t = \frac{3}{4} \in (0,2)$.

   Kandidatvärden: $f(B) = 3$ och $f(-2, \frac{3}{4}) = \frac{49}{8}$.

   $OB : x = t, y = -t, t \in [-2,0]$ och $f|_{OB} = t^3 - 3t - t + 3 = t^3 - 4t + 3 = h(t), t \in [-2,0]$.

   Lös ekv: $h'(t) = 0$ eller $3t^2 - 4 = 0$. Man får $t_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

   Obs att bara $-\frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2,0)$. Kandidatvärdet:

   $f(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = -\frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} + 3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} + 3 = \frac{16}{3\sqrt{3}} + 3.$

   Lista ut alla kandidatvärden: $6, 3, 5, \frac{49}{8}, \frac{16}{3\sqrt{3}} + 3$

   $\min f = 3$ antas i punkterna O och B, och $\max f = \frac{49}{8}$ antas i punkten $(-2, \frac{3}{4})$

5. Beräkna integralen $\int_0^1 (\int_{\sqrt{y}}^1 e^{-\frac{y}{x}}\, dx)dy$,

   Svar: Beteckna integralen med I. Använd omkastning av variabler.

   Obs att $I = \int\int_D e^{-\frac{y}{x}}\, dxdy$, där D avgränsas av linjerna:

   $y = 0, y = 1, x = 1, x = \sqrt{y}$, dessutom

   $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$.

   Så är $I = \int_0^1 (\int_0^{x^2} e^{-\frac{y}{x}}\, dy)dx = |t = -\frac{y}{x}, dy = -xdt| = -\int_0^1 xe^{-\frac{y}{x}}|_0^{x^2} dx =$
   $-\int_0^1 x(e^{-x} - 1)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 -xe^{-x}dx =$
   $|t = -x| = \frac{1}{2} + (xe^{-x} + e^{-x})|_0^1 = 2e^{-1} - \frac{1}{2}$

6. Finn massan av den kropp Ω med densitet $f(x,y,z) = xyz$

   som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \le 5$ och $x \le 0, y \le 0, z \ge 0$.

   Svar: Obs att massan M av kroppen är lika med $\int\int\int_\Omega xyzdxdydz$.

   Låt oss börja med variabelbyte: $u = -x$, $v = -y$, $w = z$. Då är $M = \int\int\int_{\Omega_{uvw}} uvwdudvdw$, där

$\Omega_{uvw} = \{(u,v,w) : u^2+v^2+w^2 \leq 5, u,v,w \geq 0\}$. Använd nu sfäriska koordinater: $u = r\sin\theta\cos\phi, v = r\sin\theta\sin\phi, w = r\cos\theta$. Räkna:

$M = \int_0^{\sqrt{5}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sin\theta\cos\phi r\sin\theta\sin\phi r\cos\theta r^2\sin\theta d\theta)d\phi)dr =$

$\int_0^{\sqrt{5}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5\sin^3\theta\cos\theta\cos\phi\sin\phi d\theta)d\phi)dr =$

$(\int_0^{\sqrt{5}} r^5 dr)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin\phi d\phi)(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta)$.

Obs $\int_0^{\sqrt{5}} r^5 dr = \frac{r^6}{6}|_0^{\sqrt{5}} = \frac{5^3}{6}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\sin\phi d\phi = |t = \sin\phi| = \frac{\sin^2\phi}{2}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta = |t=\sin\theta| = \frac{\sin^4\theta}{4}|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$.

Så är $M = \frac{125}{48}$