Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2019-01-10 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Låt $f(t)$ vara en C^2-funktion av en variabel med $D_f = R$.

   För vilket värde på k satisfierar funktionen $z(x,y) = f(x \cdot y) + e^{k\cdot(x+y)}$

   ekv $\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y\frac{\partial z}{\partial y} - x\frac{\partial z}{\partial x}$ på hela planet.

   Svar: Obs $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot f'(x\cdot y) + k \cdot e^{k\cdot(x+y)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot f'(x\cdot y) + k \cdot e^{k\cdot(x+y)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \cdot f''(x\cdot y) + k^2 \cdot e^{k\cdot(x+y)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \cdot f''(x\cdot y) + k^2 \cdot e^{k\cdot(x+y)}$. Sätt in uttrycken i ekv. Man får

   $x^2 \cdot (y^2 \cdot f''(x\cdot y) + k^2 \cdot e^{k\cdot(x+y)}) - y^2 \cdot (x^2 \cdot f''(x\cdot y) + k^2 \cdot e^{k\cdot(x+y)}) =$
   $y \cdot (x \cdot f'(x\cdot y) + k \cdot e^{k\cdot(x+y)}) - x \cdot (y \cdot f'(x\cdot y) + k \cdot e^{k\cdot(x+y)})$.

   Förenkla:

   $x^2 \cdot k^2 \cdot e^{k\cdot(x+y)} - y^2 \cdot k^2 \cdot e^{k\cdot(x+y)} = y \cdot k \cdot e^{k\cdot(x+y)} - x \cdot k \cdot e^{k\cdot(x+y)}$ eller $x^2 \cdot k^2 - y^2 \cdot k^2 = y \cdot k - x \cdot k$ eller $x^2 \cdot k^2 - y^2 \cdot k^2 + (x \cdot k - y \cdot k) = 0$ eller $k \cdot (x-y) \cdot (k \cdot (x+y) + 1) = 0$. Notera att $k = 0$ är en lösning till ekv som gäller alla punkter på planet. Finns det andra? Betrakta ekv: $(x-y) \cdot (k \cdot (x+y) + 1) = 0$. Obs om $x = 2, y = 1$ så får man $k = -\frac{1}{3}$, och om $x = 2, y = -1$ så får man $k = -1$. Därför att $-\frac{1}{3} \neq -1$ har vi inga andra värden på k.

2. Bestäm alla funktioner $z(x,y)$ som satisfierar ekv

   $z''_{xx} - \frac{1}{6}z''_{xy} - \frac{1}{6}z''_{yy} = 2x + 4y$ genom att införa nya variablerna

   $u = x + 2y$ och $v = x - 3y$.

   Svar: Obs $z''_{xx} = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$, $z''_{xy} = 2z''_{uu} - z''_{uv} - 3z''_{vv}$, $z''_{yy} = 4z''_{uu} - 12z''_{uv} + 9z''_{vv}$. Sätt in uttrycken i ekv och förenkla.

   Man får $z''_{uv} = \frac{12}{25}u$. Integrera: $z'_v = \int \frac{12}{25}u du = \frac{6}{25}u^2 + c(v)$ och

   $z(u,v) = \int(\frac{6}{25}u^2 + c(v))dv = \frac{6}{25}u^2 v + A(v) + B(u)$.

   Så är $z(x,y) = \frac{6}{25}(x+2y)^2(x-3y) + A(x-3y) + B(x+2y)$.

3. Sök alla lokalla maximi- och minimipunkter för

   $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 12) \cdot e^{2019-(x+y)}$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)

   (ii) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.

Svar: Förenkla något. Notera att $f(x,y) = e^{2019} \cdot g(x,y)$, där $g(x,y) = (x^2+y^2-12) \cdot e^{-(x+y)}$, och f, g har samma lokala extrempunkter eller sadelpunkter. Undersök $g(x,y)$.

(i): $g'_x = (2x-(x^2+y^2-12)) \cdot e^{-(x+y)}$ och $g'_y = (2y-(x^2+y^2-12)) \cdot e^{-(x+y)}$.

Lös ekv $\nabla g = \overline{0}$ och få fram två stationära punkter: $P_1(3,3)$ och $P_2(-2,-2)$.

(ii): Använd kvadratiska former. Obs $g''_{xx} = (x^2+y^2-4x-10) \cdot e^{-(x+y)}$, $g''_{yy} = (x^2+y^2-4y-10) \cdot e^{-(x+y)}$, $g''_{xy} = (x^2+y^2-2x-2y-12) \cdot e^{-(x+y)}$.

Kvadratiska formen i punkten P_1: $Q(h,k) = (-4h^2-12hk-4k^2) \cdot e^{-6} = -4e^{-6}((h+\frac{3}{2}k)^2 - \frac{5}{4}k^2)$. Obs Q är indefinit (ty Q antar både positiva samt negativa värden) så är P_1 en sadelpunkt.

Kvadratiska formen i punkten P_2: $Q(h,k) = (6h^2+8hk+6k^2) \cdot e^4 = 6e^4((h+\frac{2}{3}k)^2 + \frac{5}{9}k^2)$. Obs Q är pos. definit (ty $Q \geq 0$ för alla (h,k) och ekv $Q = 0$ har endast en lösning) så är P_2 en strängt lok. minimipunkt.

4. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = x^2y + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}y + 8$ på det område D som ges av olikheterna $0 \leq x \leq -\frac{1}{2}y \leq 1$.

   Svar: Notera att D är en sluten triangel med hörn i punkterna $A(0,-2), B(0,0)$ och $C(1,-2)$. Därför att D är kompakt och f är kontinuerlig så finns det största och minsta värde av f på D.

   Inre stationära punkter: Obs att ekv $\nabla f = \overline{0}$ har två lösningar:

   $P_1(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}) \in D$ och $P_1(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \notin D$. Så är P_1 en kandidatpunkt och $f(P_1) = \frac{35}{4}$ ett kandidatvärde.

   Randundersökning: $f|_{AB} = -\frac{1}{4}t + 8 = g_1(t), t \in [-2,0]$. Vi har två kandidatpunkter A, B och två kandidatvärde $g_1(-2) = \frac{17}{2} = f(A)$, $g_1(0) = 8 = f(B)$.

   $f|_{AC} = -2t^2+\frac{3}{2}t+\frac{17}{2} = g_2(t), t \in [0,1]$. Vi har tre kandidatpunkter A, C, $P_3(\frac{3}{8}, -2)$ och tre kandidatvärde $g_2(0) = \frac{17}{2} = f(A)$, $g_2(1) = 8 = f(C)$ och $g_2(\frac{3}{8}) = \frac{281}{32} = f(P_3)$.

   $f|_{BC} = -2t^3+2t+8 = g_3(t), t \in [0,1]$. Vi har tre kandidatpunkter B, C, $P_4(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$ och tre kandidatvärde $g_3(0) = 8 = f(B)$, $g_3(1) = 8 = f(C)$ och $g_3(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{4}{3\sqrt{3}} + 8 = f(P_4)$.

   Lista alla funna värden $\frac{35}{4}, 8, \frac{17}{2}, \frac{281}{32}, \frac{4}{3\sqrt{3}} + 8$.

   Obs $\max f = \frac{281}{32}$ antas i P_3 och $\min f = 8$ antas i B, C.

5. Beräkna integralen

$$\int\int_D \frac{x^2-4y^2}{x^3y^3} dxdy,$$

   där $D = \{(x,y):\ 3 \leq xy \leq 5,\ 2 \leq x-2y \leq 4,\ y \geq 0\}$.

   Svar: Använd variabelbytet: $u = xy, v = x-2y$. Notera att $D_{uv} = \{(u,v) : 3 \leq u \leq 5,\ 2 \leq v \leq 4\}$, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -(x+2y)$. Så är $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{1}{x+2y} > 0$ och $\frac{x^2-4y^2}{x^3y^3} \cdot |\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{(x-2y)(x+2y)}{x^3y^3} \cdot \frac{1}{x+2y} = \frac{x-2y}{x^3y^3} = \frac{v}{u^3}$.

   Integralen är lika med $\int\int_{D_{uv}} \frac{v}{u^3} dudv = (\int_3^5 \frac{1}{u^3} du) \cdot (\int_2^4 vdv) =$

   $(-\frac{1}{2u^2}|_3^5) \cdot (\frac{v^2}{2}|_2^4) = \frac{48}{225}$.

6. Beräkna volymen av den kropp som avgränsas av ytorna
$2x^2 + 2y^2 - z = 0,\ 3x^2 + 3y^2 - z = 0,\ y - x = 0,\ y^2 - x = 0.$

Svar: Obs volymen V är lika med integralen $\int\int\int_K 1dxdydz$, där kroppen K är lika med mängden

$\{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}, 2(x^2 + 2y^2) \leq z \leq 3(x^2 + y^2)\}.$

Integrera: $V = \int_0^1 (\int_x^{\sqrt{x}} (\int_{2(x^2+y^2)}^{3(x^2+y^2)} 1dz)dy)dx = \int_0^1 (\int_x^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)dy)dx = \int_0^1 (x^2 y + \frac{y^3}{3})|_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 ((x^2\sqrt{x} + \frac{x\sqrt{x}}{3}) - (x^3 + \frac{x^3}{3}))dx = \int_0^1 (x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}x^3)dx = (\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^4)|_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{2}{15} - \frac{1}{3} = \frac{3}{35}$