LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TAIU08
Provkod: TEN1

TENTAMEN I MATEMATIK TAIU08/TEN1 ( FLERVARIABELANALYS )
2020-10-29 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm Taylorpolynom $P_1$ och $P_2$ av ordning 1 och 2 i punkten (-1,0) till funktionen $f(x,y) = (1+3x^2+4y)^{\frac{1}{2}}$.

   Använd $h = x+1$ och $k = y$ för att skriva ner polynomen.

   Svar: $f'_x = 3x(1+3x^2+4y)^{-\frac{1}{2}}$, $f'_y = 2(1+3x^2+4y)^{-\frac{1}{2}}$,

   $f''_{xx} = 3(1+3x^2+4y)^{-\frac{1}{2}} - 9x^2(1+3x^2+4y)^{-\frac{3}{2}}$,

   $f''_{xy} = -6x(1+3x^2+4y)^{-\frac{3}{2}}$, $f''_{yy} = -4(1+3x^2+4y)^{-\frac{3}{2}}$.

   Så är $f(-1,0) = 2$, $f'_x(-1,0) = -\frac{3}{2}$, $f'_y(-1,0) = 1$,

   $f''_{xx}(-1,0) = \frac{3}{8}$, $f''_{xy}(-1,0) = \frac{3}{4}$, $f''_{yy}(-1,0) = -\frac{1}{2}$.

   Vi får

   $P_1 = 2 - \frac{3}{2}h + k$ och $P_2 = P_1 + \frac{3}{16}h^2 + \frac{3}{4}hk - \frac{1}{4}k^2$

2. Transformera uttrycket $U = z''_{xx} - 4xz''_{xy} + 4x^2 z''_{yy} - 2z'_y$ genom att sätta $u = x^2 + y$ och $v = x$.

   Svar: Använd kedjeregeln.

   $z'_x = 2xz'_u + z'_v$, $z'_y = z'_u$,

   $z''_{xx} = (2xz'_u + z'_v)'_x = (2x)'_x z'_u + 2x(z'_u)'_x + (z'_v)'_x =$

   $2z'_u + 4x^2 z''_{uu} + 4xz''_{uv} + z''_{vv}$,

   $z''_{xy} = 2xz''_{uu} + z''_{uv}$, $z''_{yy} = z''_{uu}$.

   Insättningen ger

   $U = z''_{vv}$

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^2y - 4x - 5y + \frac{1}{3}y^3 + 1$.

   (a) Finn alla stationära punkter till $f$ (1p)

   Svar: $f'_x = 2xy - 4$, $f'_y = x^2 - 5 + y^2$.

   Lös ekv $\nabla f = \overline{0}$: $y = \frac{2}{x}, x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

   Använd $t = x^2 \geq 0$, $t^2 - 5t + 4 = 0$, $t_{1,2} = 1, 4$.

   Så är $x_{1,2} = \pm 1$ och $x_{3,4} = \pm 2$.

   Man får

   $P_1(1,2)$, $P_2(-1,-2)$, $P_3(2,1)$, $P_4(-2,-1)$

(b) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)

Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.

Svar: $f''_{xx} = 2y$, $f''_{xy} = 2x$, $f''_{yy} = 2y$.

Kvadratiska former i funna punkter:

$Q_1(h,k) = 4h^2 + 4hk + 4k^2 = (2h+k)^2 + 3k^2$, pos. definit,

$Q_2(h,k) = -(4h^2 + 4hk + 4k^2) = -(2h+k)^2 - 3k^2$, neg. definit,

$Q_3(h,k) = 2h^2 + 8hk + 2k^2 = 2(h+2k)^2 - 6k^2$, indefinit ty

$Q_3(1,0) = 2 > 0$ och $Q_3(-2,1) = -6 < 0$

$Q_4(h,k) = -(2h^2 + 8hk + 2k^2) = -2(h+2k)^2 + 6k^2$, indefinit ty

$Q_4(1,0) = -2 < 0$ och $Q_4(-2,1) = 6 > 0$

Sammanfatta:

$P_1$ är en str. lok. min, $P_2$ är en str. lok. max,

$P_3$ är en sadelpunkt, $P_4$ är en sadelpunkt

4. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = 3y - x + xy^2$ på det område $D$ som ges av olikheterna $0 \le y \le -x \le 2$.

Svar: Obs $D$ är en sluten triangen med hörn i punkterna $O(0,0)$, $A(-2,0)$ och $B(-2,2)$. $D$ är kompakt, $f$ är kontinuerlig.

Inre stationära punkter: $\nabla f = \overline{0}$.

Det finns en punkt $P_1(-\frac{3}{2}, 1)$. Obs $f(P_1) = 3$.

Randen består av tre sträckor: $OA, AB, OB$.

Där hittar man följande kandidatpunkter:

$P_2(-2, \frac{3}{4})$ med $f(P_2) = \frac{25}{8}$,

$P_3(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ med $f(P_3) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$ och

hörnen $O$ med $f(O) = 0$, $A$ med $f(A) = 2$ och $B$ med $f(B) = 0$.

Kandidatvärden: $\{3, \frac{25}{8}, \frac{16}{3\sqrt{3}}, 0, 2\}$.

Plocka fram misnta och största. Obs $(\frac{25}{8})^2 > (\frac{16}{3\sqrt{3}})^2$.

$\min f = 0$ antas i $O$ och $B$, och $\max f = \frac{25}{8}$ antas i $P_2$.

5. Beräkna arean av området

$D = \{(x,y) : |3x - 5y| + |x - 7y| \le 4, x - 3y \le 0\}$.

Svar: Obs arean $A = \int\int_D 1\, dxdy$. Använd variabelbyte:

$u = 3x - 5y,\ v = x - 7y$. Notera att $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{1}{16}$ och

det nya området $D_{uv} = \{|u| + |v| \le 4, u + v \le 0\}$.

Så är $A = \int\int_{D_{uv}} \frac{1}{16} dudv = \frac{1}{16} \int\int_{D_{uv}} 1\ dudv$, där $\int\int_{D_{uv}} 1\ dudv$ är arean av $D_{uv}$.

Notera att mängden $\{|u| + |v| \le 4\}$ är en kvadrat i $u, v-$ planet med hörn i punkterna $(4,0), (-4,0), (0,4), (0,-4)$ och med arean 32, och $D_{uv}$ är halvan av kvadraten som ligger under linjen $u + v = 0$.

Så är $A = 1$

6. Finn massan av den kropp $\Omega$ med densitet $f(x,y,z) = \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}$

som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \le 3$ och $z \ge 0$.

Svar: Obs $M = \int\int\int_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$.

Använd sfäriska koordinater $r, \phi, \theta$.

Det nya integrationsområde $\Omega_{r,\phi,\theta} =$

$\{0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \phi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Så är $M = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{1+r^2} dr \cdot \int_0^{2\pi} 1\ d\phi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta$, där

$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r^3}{1+r^2} dr = \frac{3}{2} - ln2$,

$\int_0^{2\pi} 1\ d\phi = 2\pi$ och $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{2}$.

Sammanfatta:

$M = \pi(\frac{3}{2} - ln2)$