LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TAIU08
Provkod: TEN1

TENTAMEN I MATEMATIK TAIU08/TEN1 (FLERVARIABELANALYS)
2021-01-08 KL 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. (a) Bestäm alla kontinuerligt deriverbara funktioner $f(x, y)$ som uppfyller villkoren
$f'_x = -x \cdot cos(y) + yx^2 + 2$ and $f'_y = \frac{x^2}{2} \cdot sin(y) + \frac{x^3}{3} + 1$.
Kontrollera svaret genom derivering.
Svar: Integrera f'_x m a p x. Då får man $f(x, y) = \int f'_x dx = -\frac{x^2}{2} \cos y + y\frac{x^3}{3} + 2x + c(y)$. Derivera det funna uttrycket för $f(x, y)$ m a p y och jämför med det givna uttrycket för f'_y. Vi får $f'_y = (-\frac{x^2}{2} \cos y + y\frac{x^3}{3} + 2x + c(y))'_y = \frac{x^2}{2} \sin y + \frac{x^3}{3} + c'(y) = \frac{x^2}{2} \sin y + \frac{x^3}{3} + 1$. Observera att $c'(y) = 1$. Finn $c(y) = \int c'(y)dy = y + d$, där d är en godtycklig konstant.
Sammanfatta: $f(x, y) = -\frac{x^2}{2} \cos y + y\frac{x^3}{3} + 2x + y + d$.

   (b) Finn dessutom den funktion $f(x, y)$ som satisfierar villkoret:
$f(1, 0) = 3$
Svar: Använd uttrycket för f från (a) och finn d som svarar mot villkoret $f(1, 0) = 3$. Vi får $d = \frac{3}{2}$.
Skriv svaret: $f(x, y) = -\frac{x^2}{2} \cos y + y\frac{x^3}{3} + 2x + y + \frac{3}{2}$

2. Bestäm Taylorpolynom P_1 och P_2 av ordning 1 och 2 i punkten (-1,0) till funktionen $f(x, y) = e^{1+3x^2+4y}$.

   Använd $h = x + 1$ och $k = y$ för att skriva ner polynomen.

   Svar: Repetera att $P_1(h, k) = f(-1, 0) + f'_x(-1, 0)h + f'_y(-1, 0)k$ och

   $P_2(h, k) = P_1(h, k) + \frac{1}{2}(f''_{xx}(-1, 0)h^2 + 2f''_{xy}(-1, 0)hk + f''_{yy}(-1, 0)k^2)$.

   Beräkna nödvändiga derivator av f och konstanterna.

   $f'_x = 6xe^{1+3x^2+4y}$, $f'_y = 4e^{1+3x^2+4y}$.

   $f''_{xx} = (6 + 36x^2)e^{1+3x^2+4y}$, $f''_{xy} = 24xe^{1+3x^2+4y}$, $f''_{yy} = 16e^{1+3x^2+4y}$.

   $f(-1, 0) = e^4$, $f'_x(-1, 0) = -6e^4$, $f'_y(-1, 0) = 4e^4$,

   $f''_{xx}(-1, 0) = 42e^4$, $f''_{xy}(-1, 0) = -24e^4$, $f''_{yy}(-1, 0) = 16e^4$.

   Samanfatta: $P_1(h, k) = e^4(1 - 6h + 4k)$ och

   $P_2(h, k) = P_1(h, k) + e^4(21h^2 - 24hk + 8k^2)$.

3. Betrakta funktionen $f(x, y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2 + 3$.

(a) Finn alla stationära punkter till f (1p)

Svar: Lös ekv: $\nabla f = \overline{0}$ eller systemet: $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$.

Man får systemet: $3x^2 + 4x + y = 0$ och $x + 2y = 0$ som har två lösningar: $x_1 = 0, y_1 = 0$ och $x_2 = -\frac{7}{6}, y_2 = \frac{7}{12}$.

Sammanfatta: två stationära punkter: $P_1(0,0)$ och $P_2(-\frac{7}{6}, \frac{7}{12})$.

(b) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)

Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.

Svar. Om P är en stationär punkt för f så är motsvarande kvadratiska formen $Q(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$.

Beräkna derivator av f:

$f''_{xx} = 6x + 4$, $f''_{xy} = 1$ och $f''_{yy} = 2$.

Undersök P_1: $Q_1(h,k) = 4h^2 + 2hk + 2k^2 = (2h + \frac{k}{2})^2 + \frac{7}{4}k^2$.

Obs $Q_1(h,k) \geq 0$ för alla (h,k) och ekv $Q_1(h,k) = 0$ har endast en lösning. Så är Q_1 pos. definit och P_1 en str. lok. minimipunkt.

Undersök P_2: $Q_2(h,k) = -3h^2 + 2hk + 2k^2 = 2(k + \frac{h}{2})^2 - \frac{7}{2}h^2$.

Obs $Q_2(0,1) = 2 > 0$ och $Q_2(2,-1) = -14 < 0$. Så är Q_2 indefinit och P_2 en sadelpunkt.

4. Vilka värden antar funktionen $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 5$ på cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 14$.

Tips. Först, finn största och minsta värden.

Svar: Obs att cirkelskivan är kompakt och f är kontinuerlig på cirkelskivan. Så har f största och minsta värden.

Börja jakten på kandidatpunkter och kandidatvärden.

Det inre av cirkelskivan:

Lös systemet: $\nabla f = \overline{0}$ (1) och $x^2 + y^2 < 14$ (2).

Starta med (1): Vi har systemet: $2x + y - 3 = 0$ och x+2y $= 0$ som har en lösning: $x = 2$ och $y = -1$.

Observera att $2^2 + (-1)^2 = 5 < 14$. Så är punkten $P_1(2,-1)$ en kandidatpunkt och $f(P_1) = 2$ är ett kandidatvärde.

Randen av cirkelskivan:

Inför funktionen $g(x,y) = x^2 + y^2$ och tolka ekv $x^2 + y^2 = 14$ (som beskriver randen) som ett bivillkor.

Lös systemet: ∇f, ∇g är lin. beroende (1) och $g(x,y) = 14$ (2).

Starta med (1) och använd determinanten. Man får ekv $y^2 - 3y - x^2 = 0$ istället för (1).

Fortsätt med systemet: $y^2 - 3y - x^2 = 0$ (1) och $x^2 + y^2 = 14$ (2).

Obs $x^2 = 14 - y^2$. Sätt HL i (1) och få fram ekv $2y^2 - 3y - 14 = 0$.

Denna har två rötter: $y_1 = -2$ och $y_2 = \frac{7}{2}$.

Fall y_1: Insättning av $y_1 = -2$ i (2) ger två värde på x: $x = \pm\sqrt{10}$.

Fall y_2: Insättning av $y_2 = \frac{7}{2}$ i (2) ger två värde på x: $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Vi får fyra kandidatpunkter: $P_2(-\sqrt{10}, -2)$, $P_3(\sqrt{10}, -2)$, $P_4(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{7}{2})$, $P_5(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{7}{2})$ och fyra kandidatvärden:

$f(P_2) = 19+5\sqrt{10}$, $f(P_3) = 19-5\sqrt{10}$, $f(P_4) = 19-\frac{\sqrt{7}}{4}$, $f(P_5) = 19+\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Välj max och min av kandidatvärdena:

$\max f = 19 + 5\sqrt{10}$ antas i P_2 och $\min f = 2$ antas i P_1.

Funktionen f på cirkelskivan antar alla värden mellan 2 och $19 + 5\sqrt{10}$.

5. Beräkna integralen $\int_0^1 (\int_x^1 (1 + \tan(y^2))dy)dx$

   Svar: Dela upp integralen $I = \int_0^1 (\int_x^1 (1+\tan(y^2))dy)dx$ i två delintegraler $I_1 = \int_0^1 (\int_x^1 1dy)dx$ och $I_2 = \int_0^1 (\int_x^1 \tan(y^2)dy)dx$.

   Obs $I_1 = \frac{1}{2}$.

   För att bestämma I_2 kasta om variablerna.

   Vi får $I_2 = \int_0^1 (\int_0^y (\tan(y^2))dx)dy = \int_0^1 y\tan(y^2)dy = |t = y^2| =$ $\frac{1}{2}\int_{y=0}^{y=1} \tan t dt = |\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, s = \cos t| = (-\frac{1}{2}\ln|\cos(y^2)|)_0^1 =$ $-\frac{1}{2}\ln|\cos(1)|$. Så är $I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\cos(1)$.

6. Beräkna volymen av den kropp som ges av olikheterna $2x^2 + y^2 \le z \le 8 - y^2$.

   Svar: Obs $V = \int\int_D ((8 - y^2) - (2x^2 + y^2))dxdy$, där $D = \{x^2 + y^2 \le 4\}$.

   Fortsätt $V = 2\int\int_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$. Använd polära koordinater.

   Vi får $V = 2\int_0^2 (\int_0^{2\pi} (4 - r^2)rd\phi)dr = 4\pi\int_0^2 (4r - r^3)dr = 16\pi$.

Lycka till !