Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2021-08-23 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm Taylorpolynomen P_1 och P_2 av ordningen 1 och 2 i punkten (1,1) till funktionen $f(x,y) = 4x^3 - 3xy^2 + 2xy - x + 4$.

   Använd $h = x - 1$ och $k = y - 1$ för att skriva ner polynomen.

   Svar: Obs $f'_x = 12x^2 - 3y^2 + 2y - 1$, $f'_y = -6xy + 2x$, $f''_{xx} = 24x$, $f''_{xy} = -6y + 2$, $f''_{yy} = -6x$. Låt $P(1,1)$.

   Gör insättning i formlerna:

   $P_1 = f(P) + f'_x(P)(x-1) + f'_y(P)(y-1)$ och

   $P_2 = P_1 + \frac{1}{2}(f''_{xx}(P)(x-1)^2 + 2f''_{xy}(P)(x-1)(y-1) + f''_{yy}(P)(y-1)^2)$.

   $P_1(h,k) = 6 + 10h - 4k$, $P_2(h,k) = P_1(h,k) + 12h^2 - 4hk - 3k^2$.

2. Transformera uttrycket $U = \frac{1}{y} \cdot f'_x - f''_{xy}$ genom att sätta $u = 2y$ och $v = xy$. Funktionen f har kontinuerliga partiella derivator av ordning 2.

   Svar: Obs $f'_x = y \cdot f'_v$, $f''_{xy} = (f'_x)'_y = (y \cdot f'_v)'_y = f'_v + y \cdot (f'_v)'_y = f'_v + u \cdot f''_{uv} + v \cdot f''_{vv}$.

   Gör insättning i U:

   $U = -uf''_{uv} - vf''_{vv}$

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + xy + y^2$.

   (a) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   Svar: Lös ekv: $\nabla f = \overline{0}$, eller
   systemet: $3x^2 + 4x + y = 0$ och $x + 2y = 0$. Notera att $2y = -x$.
   $P_1(0,0)$ och $P_2(-\frac{7}{6}, \frac{7}{12})$.

   (b) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
   Svar: Använd kvadratiska former i de funna punkterna.
   Obs $f''_{xx} = 6x + 4$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 2$.
   För punkten P_1 har vi formen $Q_1(h,k) = 4h^2 + 2hk + 2^2 =$
   $(2h + \frac{k}{2})^2 + \frac{7}{4}k^2$. Notera att Q_1 är pos. definit.
   För punkten P_2 har vi formen $Q_1(h,k) = -3h^2 + 2hk + 2^2 =$
   $2(k + \frac{h}{2})^2 - \frac{7}{2}h^2$. Notera att Q_2 är indefinit.
   P_1 är en str. lok. minimipunkt och P_2 är en sadelpunkt.

4. På ellipsen $17x^2+12xy+8y^2 = 100$ finn alla punkter som ligger närmast till origo och som ligger längst bort från origo. Ange avstånden.

   Svar: Inför funktionerna:

   $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $g(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2$.

   Obs ett optimeringsproblem med ett bivillkor. Dessutom, ellipsen E är en kompakt mängd, och funktionen $d(x, y)$ är kontinuerlig på K.

   Så existerar extremvärden.

   Lös systemet: $g(x, y) = 100$, och $\nabla d, \nabla g$ är linjärt beroende, för att hitta kandidat punkter.

   Transformera systemet till följande system:

   $12x^2 - 18xy - 12y^2 = 0$ och $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$.

   Notera att $25x^2 = 100$. Man får punkterna: $P_1(2, 1)$, $P_2(-2, -1)$, $P_3(2, -4)$ och $P_4(-2, 4)$.

   Beräkna $d(P_i), i = 1, \ldots, 4$. Välj max och min.

   Punkterna $P_1(2, 1)$ och $P_2(-2, -1)$ ligger närmast till origo, med avstånd $\sqrt{5}$. Punkterna $P_3(2, -4)$ och $P_4(-2, 4)$ ligger längst bort från origo, med avstånd $2\sqrt{5}$.

5. Beräkna integralen

   $I = \int\int_D \frac{xy}{1+x^4} dxdy$, där D är triangeln med hörn $(0, 0), (0, 2), (2, 2)$.

   Svar: Rita bilden för att se tydligt triangeln.

   Skriv om integralen i upprepad form: $I = \int_0^2 (\int_0^y \frac{xy}{1+x^4} dx)dy$.

   Börja med substitutionen: $t = x^2$ i inre integralen.

   Man får $I = \frac{1}{2} \int_0^2 y \arctan(y^2)dy$.

   En substitution till: $s = y^2$. Så är $I = \frac{1}{4} \int_0^4 \arctan s ds$.

   Fortsätt med p.i.

   $I = \frac{1}{4}(4 \arctan 4 - \frac{1}{2} \ln 17)$.

6. Finn volymen av kroppen som ges av olikheterna $x^2 + y^2 \leq z \leq 11 - 4x - 2y$.

   Svar: Obs volymen $V = \int\int_D((11 - 4x - 2y) - (x^2 + y^2)) =$
   $\int\int_D(16 - (x + 2)^2 - (y + 1)^2)$.

   Gränsen för D definieras av ekv:

   $x^2 + y^2 = 11 - 4x - 2y$ eller $16 - (x + 2)^2 - (y + 1)^2 = 0$.

   Så är D en cirkelskiva med radie 4 och centrum i punkten $(-2, 1)$.

   Första substitutionen: $u = x + 2$ och $v = y + 1$. Då får vi

   $V = \int\int_{u^2+v^2\leq 4^2}(16 - u^2 - v^2)dudv$.

   Fortsätt med polära koordinater: $V = \int_0^{2\pi}(\int_0^4(16 - r^2)rdr)$.

   128π