Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2021-10-29 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Lå $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Finn $f'_x(x,y)$ och $f'_y(x,y)$ då $(x,y) \neq (0,0)$ (1p)
   Svar: $f'_x = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ och $f'_y = \frac{4y^3x^2+2y^5-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

   (b) Finn $f'_x(0,0)$ och $f'_y(0,0)$ (1p)
   Svar: $f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$ och
   $f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2-0}{y} = 0$.

   (c) Finn även $f''_{xy}(0,0)$ och $f''_{yx}(0,0)$ (1p)
   Svar: $f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-1}{y}$ saknas och
   $f''_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$.

   Notera att i (b) och (c) använder man gränsvärde.

2. Bestäm Taylorpolynomen P_1 och P_2 av ordningen 1 och 2 i punkten (1,-1) till funktionen $f(x,y) = \arctan(x \cdot y)$.

   Använd $h = x - 1$ och $k = y + 1$ för att skriva ner polynomen.

   Obs $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$ och $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

   Svar: Notera att $P_1(h,k) = f(1,-1) + f'_x(1,-1)h + f'_y(1,-1)k$.

   Så $P_1(h,k) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k$.

   Vidare, observera att

   $P_2(h,k) = P_1(h,k) + \frac{1}{2}(f''_{xx}(1,-1)h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2)$.

   Så $P_2(h,k) = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}k^2$.

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = y^2 + 2y + x^3 - 2x^2 - 2xy - 2x + 7$.

   (a) Finn alla stationära punkter till f (1p)
   Svar: Stationära punkter är lösningar till ekv $\nabla f = \overline{0}$ eller systemet: $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$.
   Så får vi systemet: $3x^2 - 4x - 2y - 2 = 0$, och $2y + 2 - 2x = 0$ vilket har två lösningar: $P_1(0,-1)$ och $P_2(2,1)$.

(b) Avgör de här stationära punkternas karaktär (2p)
Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
Svar: Kvadratiska formen i P_1 är
$Q_1(h,k) = -4h^2 - 4hk + 2k^2 = -(2h+k)^2 + 3k^2$, indefinit.
Kvadratiska formen i P_2 är
$Q_2(h,k) = 8h^2 - 4hk + 2k^2 = 2(h-k)^2 + 6h^2$, pos. definit.
P_1 är en sadelpunkt, P_2 är en lok. min. punkt.

4. Bestäm största och minsta värden av $f(x,y) = 4 + xy^3$ på kurvan
$x^4 + 3y^4 = 4$.
Obs ett bivillkor, och att kurvan är en begränsad och sluten mängd.
Svar: Notera att maximivärde samt minimivärde finns, och extrempunkterna ligger bland lösningar till systemet:
(*) $\nabla f, \nabla g$ är lin. beroende, och $g = 4$, där $g(x,y) = x^4 + 3y^4$.
Observera att systemet (*) är ekvivalent systemet (**):
$y^2(y^4 - x^4) = 0$, och $g = 4$.
Vidare, systemet (**) har sex lösningar (kandidatpunkter):
$Q_1(1,1), Q_2(-1,-1), Q_3(1,-1), Q_4(-1,1)$ och $Q_5(\sqrt{2},0)$ och $Q_6(-\sqrt{2},0)$.
Kandidatvärde är $\{3,4,5\}$. Så
$\max f = 5$ antas i punkterna $Q_1(1,1)$ och $Q_2(-1,-1)$, och
$\min f = 3$ antas i punkterna $Q_3(1,-1)$ och $Q_4(-1,1)$.

5. Beräkna integralen
$I = \int\int_D \frac{x^3}{1+y^5} dxdy$, där $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 3y \le 3\}$.
Svar: $I = \int_0^1 (\int_0^{3y} \frac{x^3}{1+y^5} dx) dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y^5} (\int_0^{3y} x^3 dx) dy = \frac{81}{20} \ln 2$.

6. Låt $K = \{(x,y,z) : x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0, x + y^2 + z \le 1\}$.
Beräkna volymen av K.
Svar: $V_K = \int\int\int_K 1 dxdydz = \int\int_D (\int_0^{1-x-y^2} 1 dz) dxdy =$
$\int\int_D (1 - x - y^2) dxdy$, där D definieras av systemet:
$x + y^2 \le 1$ och $x, y \ge 0$.
Forts,
$V_K = \int_0^1 (\int_0^{1-y^2} (1 - x - y^2) dx) dy = \frac{4}{15}$