Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2022-01-08 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm Taylorpolynomen P_1 och P_2 av ordningen 1 och 2 i punkten (-1,1) till funktionen $f(x, y) = \arctan(x \cdot y)$.

   Använd $h = x + 1$ och $k = y - 1$ för att skriva ner polynomen.

   Obs $(\arctan t)' = \frac{1}{1+t^2}$ och $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

   Svar: Obs att $f(-1, 1) = -\frac{\pi}{4}$, $f'_x = \frac{y}{1+(xy)^2}$, $f'_y = \frac{x}{1+(xy)^2}$ och $f'_x(-1, 1) = \frac{1}{2}$, $f'_y(-1, 1) = -\frac{1}{2}$. Det medför att $P_1(h, k) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}k$.

   Notera vidare att $f''_{xx} = -\frac{2xy^3}{(1+(xy)^2)^2}$, $f''_{yy} = -\frac{2yx^3}{(1+(xy)^2)^2}$, $f''_{xy} = \frac{1-x^2y^2}{(1+(xy)^2)^2}$ och $f''_{xx}(-1, 1) = \frac{1}{2}$, $f''_{yy}(-1, 1) = \frac{1}{2}$, $f''_{xy}(-1, 1) = 0$. Det medför att $P_2(h, k) = P_1(h, k) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}k^2) = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}h^2 + \frac{1}{4}k^2$.

2. Betrakta ekvationen $z''_{xx} - 4z''_{yy} = y$.

   (i) Transformera ekv till de nya variablerna $u = x + \frac{1}{2}y$ och $v = x - \frac{1}{2}y$ (2p).
   Svar: Obs att $z'_x = z'_u + z'_v$, $z'_y = \frac{1}{2}(z'_u - z'_v)$, notera vidare att $z''_{xx} = (z'_x)'_x = (z'_u + z'_v)'_x = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}$ och $z''_{yy} = (z'_y)'_y = (\frac{1}{2}(z'_u - z'_v))'_y = \frac{1}{4}(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv})$.
   Insättningen i ekv:
   $(z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv}) - 4(\frac{1}{4}(z''_{uu} - 2z''_{uv} + z''_{vv})) = u - v$ eller
   $4z''_{uv} = u - v$ eller $z''_{uv} = \frac{1}{4}(u - v)$ $(*)$.

   (ii) Lös ekv $z''_{xx} - 4z''_{yy} = y$ (1p).
   Svar: Integrera (*):
   Obs att $z''_{uv} = (z'_u)'_v$. Så är $z'_u = \int \frac{1}{4}(u - v)dv = \frac{1}{4}(uv - \frac{v^2}{2}) + c(u)$ och $z = \int(\frac{1}{4}(uv - \frac{v^2}{2}) + c(u))du = \frac{1}{8}(u^2v - v^2u) + A(u) + B(v)$.
   Åter till x, y-variablerna:
   $z(x, y) = \frac{1}{8}(x^2 - \frac{y^2}{4})y + A(x + \frac{1}{2}y) + B(x - \frac{1}{2}y)$, där A, B är deriverbara funktioner.

3. Betrakta funktionen $f(x, y) = x \cdot (x^2 + 2x + y) + y^2 + 3$.

   (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)

Svar: Börja med ekv $\nabla f = \overline{0}$ eller systemet: $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$ (*).

Forts med (*): $3x^2 + 4x + y = 0$ och $x + 2y = 0$. Man får två stationära punkter: $P_1(0,0)$ och $P_2(-\frac{7}{6}, \frac{7}{12})$.

(ii) Avgör punkternas karaktär. (2p)

Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.

Svar: Repetera att den kvadratiska formen i en stationär punkt P är funktionen $Q(h,k) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$.

Obs att $f''_{xx} = 6x + 4$, $f''_{xy} = 1$, $f''_{yy} = 2$.

Betrakta punkten $P_1(0,0)$:

$Q_1(h,k) = 4h^2 + 2hk + 2k^2 = 2((k + \frac{h}{2})^2 + \frac{7}{4}h^2)$. Notera att $Q_1(h,k)$ är pos. definit.

Det medför att P_1 är en str. lok. minimipunkt.

Betrakta punkten $P_2(-\frac{7}{6}, \frac{7}{12})$:

$Q_2(h,k) = -3h^2 + 2hk + 2k^2 = 2((k + \frac{h}{2})^2 - \frac{7}{4}h^2)$. Notera att $Q_2(h,k)$ är indefinit.

Det medför att P_2 är en sadelpunkt.

4. Bestäm största och minsta värde av $f(x,y) = xy^2 + 3y - x + 2$ på en sluten triangel D med hörn $(0,0), (-2,0), (-2,2)$

(Obs $D = \{-2 \leq x \leq -y \leq 0\}$).

Svar: Obs att f är kontinuerlig och D är kompakt. Så existerar största och minsta värde av f.

(i) Inre stationära punkter:

Betrakta ekv $\nabla f = \overline{0}$ eller systemet: $f'_x = 0$ och $f'_y = 0$ (*).

Forts med (*): $y^2 - 1 = 0$ och $2xy + 3 = 0$. Systemet har två lösningar: $P_1(-\frac{3}{2}, 1)$ och $P_2(\frac{3}{2}, -1)$ (Obs att P_2 är utanför D).

Man får en kandidat punkt P_1 med kandidat värde $f(P_1) = 5$.

(ii) Randundersökning.

Notera att D har randen som är unionen av tre sträckor.

$OA : x = t$ och $y = 0, t \in [-2, 0]$, $AB : x = -2$ och $y = t, t \in [0, 2]$ och $OB : x = t$ och $y = -t, t \in [-2, 0]$.

Finn kandidat punkter och kandidat värde för sträckorna.

Lista sedan alla erhållna kandidat värdena: $\{5, 2, 4, \frac{41}{8}, \frac{16}{3\sqrt{3}} + 2\}$ och välj max och min av dem. Notera att

$\min f = 2$ antas i punkterna $(0,0)$ och $(-2,2)$ och

$\max f = \frac{41}{8}$ antas i punkten $(-2, \frac{3}{4})$.

5. Beräkna arean av området

$D = \{(x,y) : \quad 2 \cdot |x - 3y| + |3x - 4y| \leq 6, x - 2y \geq 0\}$.

Svar: Repetera att arean A av området D är lika med $\int\int_D 1 dxdy$.

Fortsätt med omskrivningen av D:

$D = \{(x,y) : \quad |2x - 6y| + |3x - 4y| \leq 6, x - 2y \geq 0\}$.

Inför substitutuionen:

$u = 2x - 6y$ och $v = 3x - 4y$.

Notera att $D_{uv} = \{(u, v) : |u| + |v| \leq 6, \frac{u+v}{5} \geq 0\}$ och $\frac{\partial xy}{\partial uv} = \frac{1}{10}$.

Man får att $A = \frac{1}{10} \int \int_{D_{uv}} 1dudv = \frac{18}{5}$.

6. Finn massan av den kropp Ω med densitet $f(x, y, z) = \frac{z}{1+x^2+y^2+z^2}$ som ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$ och $x, z \geq 0$.

   Svar: Notera att massan M är lika med $\int \int \int_\Omega f(x, y, z)dxdydz$. Använd sfäriska kooordinater. Obs att $0 \leq r \leq \sqrt{5}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$.

   $M = \int_0^{\sqrt{5}} dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \cos \psi r^2 \sin \psi}{1+r^2} d\psi = \frac{\pi}{4}(5 - \ln 6)$.

Lycka till !