LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TAIU08
Provkod: TEN1

TENTAMEN I MATEMATIK TAIU08/TEN1 (FLERVARIABELANALYS)
2022-08-22 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Undersök gränsvärdena.

   (a) $\lim_{(x,y)\to(-5,1)} \frac{x-10y-2xy+5}{2x-15y-3xy+10}$,
   Svar: Låt $U = \frac{x-10y-2xy+5}{2x-15y-3xy+10}$.
   Obs att insatsen $x = -5$ och $y = 1$ i U ger $\frac{0}{0}$.
   Utryck! $U = \frac{(x+5)-2y(x+5)}{2(x+5)-3y(x+5)} = \frac{1-2y}{2-3y} = U'$.
   Obs att insatsen $x = -5$ och $y = 1$ i U' ger 1.
   Så är gränsvärdet lika med 1.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3+x^2y-3y^3}{x^3-xy^2-5y^3}$.
   Låt $U = \frac{4x^3+x^2y-3y^3}{x^3-xy^2-5y^3}$.
   Obs att insatsen $x = 0, y = 0$ i U ger $\frac{0}{0}$.
   Notera också att restriktionen av U på linjen $y = 0$ har följande uttryck $\frac{4x^3}{x^3} = 4$ vilket går mot 4 då x går mot 0. Det leder till att om gränsvärdet finns är detta lika med 4.
   Vidare, att restriktionen av U på linjen $x = 0$ har följande uttryck $\frac{-3y^3}{-5y^3} = \frac{3}{5}$ vilket går mot $\frac{3}{5}$ då y går mot 0. Det leder till att om gränsvärdet finns är detta lika med $\frac{3}{5}$.
   Därför att $\frac{3}{5} \neq 4$ gränsvärdet existerar ej.

2. Bestäm Taylorpolynomen P_1 och P_2 av ordningen 1 och 2 i punkten (1,1) till funktionen $f(x,y) = 5x^3 + 3xy^2 + xy - y + 1$.

   Använd $h = x - 1$ och $k = y - 1$ för att skriva ner polynomen.

   Svar: Obs $f'_x = 15x^2 + 3y^2 + y$ och $f'_y = 6xy + x - 1$.

   Repetera att $P_1(h,k)(P) = f(P) + f'_x(P)h + f'_y(P)k = 9 + 19h + 6k$

   Obs $f''_{xx} = 30x$, $f''_{xy} = 6y + 1$, $f''_{yy} = 6x$.

   Repetera att

   $P_2(h,k)(P) = P_1(h,k)(P) + \frac{1}{2}(f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2) = 9 + 19h + 6k + 15h^2 + 7hk + 3k^2$

3. Betrakta funktionen $f(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy + 1$.

(a) Vilka av punkterna $P_1(0,0)$, $P_2(0,1)$, $P_3(1,1)$ är stationära? (1p)
Svar: Notera att
$\nabla(f) = (f'_x, f'_y) = (4xy + 2y^2 - 2xy^2 - 4y, 2x^2 + 4xy - 2x^2y - 4x)$.
Räkna:
$\nabla f(P_1) = (0,0)$, så är P_1 en stationär punkt.
$\nabla f(P_2) = (-2,0) \neq (0,0)$, så är P_2 ingen stationär punkt.
$\nabla f(P_3) = (0,0)$, så är P_3 en stationär punkt.

(b) Avgör karaktären av de funna stationära punkterna (2p)
Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former.
Svar: Repetera att $Q(h,k)(P) = f''_{xx}(P)h^2 + 2f''_{xy}(P)hk + f''_{yy}(P)k^2$.
Räkna:
$f''_{xx} = 4y - 2y^2$, $f''_{xy} = 4x + 4y - 4xy - 4$, $f''_{yy} = 4x - 2x^2$.
Vi får att
$Q(h,k)(P_1) = -8hk$ är indefinit ty $Q(1,1)(P_1) = -8 < 0$ och $Q(1,-1)(P_1) = 8 > 0$. Punkten P_1 är en sadelpunkt.
$Q(h,k)(P_3) = 2h^2 + 2k^2$ är pos. definit ty $Q(h,k)(P_3) \geq 0$ för alla (h,k) och ekv $Q(h,k)(P_3) = 0$ har en enda lösning $(0,0)$. Således är P_3 är str. lok. minimipunkt

4. Finn max och min av funktionen $fx, y) = y^2 - xy + 1$ då $x^2 + y^2 \leq 2$.

Svar: Obs att området är kompakt och funtionen är kontinuerlig. Så finns det max och min av f,

(i) Inre stationära punkter. Lös ekv $\nabla f = \overline{0}$ eller systemet: $-y = 0$ och $2y - x = 0$. Vi får att $P(0,0)$ är en enda inre stationär punkt, och $f(P) = 1$ (kandidatvärde).

(ii) Randundersökning: Obs att randen är cirkeln $x^2 + y^2 = 2$.

Inför funktionen $g(x,y) = x^2 + y^2$. Nästa kandidatpunkter ger systemet:

$\nabla f, \nabla g$ är lin. beroende, och $g(x,y) = 2$ eller

$x^2 - y^2 = 2xy$, och $x^2 + y^2 = 2$. Kalla systemet (*).

Kvadrera både ekvationerna.

Man får systemet: $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 4x^2y^2$, och $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4$. Subtrahera från andra första, och få ekv $2x^2y^2 = 1$. Vidare $xy = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Stoppa de värdena i systemet (*) istället för xy.

Man får två system:

(a) $x^2 - y^2 = \sqrt{2}$, och $x^2 + y^2 = 2$;

(b) $x^2 - y^2 = -\sqrt{2}$, och $x^2 + y^2 = 2$.

Fortsätt med (a):

Obs att $x^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Så är $x = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}$ och $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Vi får två kandidatpunkter till:

$P_1(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}})$ och $P_2(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}})$.

Analogt med (b):

Obs att $x^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Så är $x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$ och $y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} = \mp\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

Vi får två kandidatpunkter till:

$P_3(\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}, -\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}})$ och $P_4(-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}, \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}})$.

Räkna:

$f(P_1) = f(P_2) = \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$ (kandidatvärde),

$f(P_3) = f(P_4) = \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$ (kandidatvärde).

Glöm ej att $f(P) = 1$. Välj max och min av kandidatvärdena.

Nu får man att min $= \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$, max $= \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$

5. Beräkna integralen

$I = \int\int_D \frac{xy}{1+y^2} dxdy$, där D är triangeln med hörn $(0,0), (3,0), (3,3)$.

Svar: Obs att $I = \int_0^3 (\int_0^x \frac{xy}{1+y^2} dy) dx = \int_0^3 x\frac{1}{2}\ln(1+y^2)|_0^x dx =$

$\frac{1}{2}\int_0^3 x\ln(1+x^2)dx = |t = 1+x^2| = \frac{1}{4}\int_{x=0}^{x=3} \ln(t)dt = |p.i.| =$

$\frac{1}{4}(t\ln(t) - t)|_{x=0}^{x=3} = \frac{1}{4}((1+x^2)\ln(1+x^2) - (1+x^2))|_0^3 = \frac{1}{4}(10\ln(10) - 9)$.

6. Finn massan av kroppen som ges av olikheterna

$x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $y \ge |z|$ med densitet $f(x,y,x) = e^{((x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}})}$.

Svar: Kalla området Ω. Obs att massan $M = \int\int\int_\Omega f(x,y,x) dxdydz$. Av symmetriskäl kan man välja $\Omega = \{x^2+y^2+z^2 \le 4, y \ge |x|\}$.

Använd sfäriska koordinater (se Fö 9). Repetera att $|\frac{d(xyz)}{dr\phi\psi}| = r^2\sin(\psi)$

Notera att

$M = \int\int\int_{0\le r\le 2, \frac{\pi}{4}\le\phi\le\frac{3\pi}{4}, 0\le\psi\le\pi} e^{r^3} r^2 \sin(\psi) dr d\phi d\psi =$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\phi \cdot \int_0^2 e^{r^3} r^2 dr \cdot \int_0^\pi \sin(\psi) d\psi = \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^2 e^{r^3} r^2 dr \cdot (-\cos(\psi))|_0^\pi =$

$\pi \cdot \int_0^2 e^{r^3} r^2 dr = |t = r^2| = \frac{\pi}{3} e^{r^3}|_0^2 = \frac{\pi}{3}(e^8 - 1)$.