

TENTAMEN I MATEMATIK TAIU08/TEN1 (FLERVARIABELANALYS)
2023-01-05 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.

Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.

15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.

Resultatet kommer inom två veckor.

1. (i) Lös följande system av partiella differentialekvationer

$$\begin{cases} z'_x = x^2 + e^y \\ z'_y = y^3 + xe^y \end{cases} \quad (2p).$$

Svar: $z(x, y) = \frac{x^3}{3} + xe^y + \frac{y^4}{4} + d, d \in R.$

- (ii) Ange den lösning som satisfierar villkoret: $z(2, 1) = 5$ (1p)

Svar: $z(x, y) = \frac{x^3}{3} + xe^y + \frac{y^4}{4} + \frac{25}{12} - 2e.$

2. Transformera uttrycket $F = f''_{xx} + f''_{xy} - 6f''_{yy}$ till nya variabler $u = x + \frac{1}{2}y$ och $v = x - \frac{1}{3}y$.

Svar: $\frac{25}{6} f''_{uv}$

3. Betrakta funvktionen $f(x, y) = 8x^3 + 6xy^2 - 30x + y^3 - 15y + 3$.

- (i) Finn alla stationära punkter till f (1p)

Svar: $P_1(0, \sqrt{5}), P_2(0, -\sqrt{5}), P_3(1, 1), P_4(-1, -1)$

- (ii) Avgör karaktären av de funna stationära punkterna.

Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former. (2p)

Svar: P_1, P_2 sadelpunkter; P_3 lok. min; P_4 lok. max.

4. Bestäm kortaste avståndet från origo till kurvan $y^4 = \frac{64}{x}$ samt ange motsvarande punkter på kurvan.

Hint. Avståndet från punkten (x, y) till origo är $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Svar. avståndet $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt{5}$ antas i punkterna $P_1(\sqrt[5]{4}, 2\sqrt[5]{4})$ och $P_2(\sqrt[5]{4}, -2\sqrt[5]{4})$.

5. Beräkna integralen

$$\int \int_D \frac{5y^3}{1+x^5} dx dy, \text{ där } D = \{(x, y) : 0 \leq 3y \leq 6x \leq 1\}$$

Svar: $4 \ln\left(\frac{7777}{7776}\right)$

6. Finn massan av kroppen $\Omega =$

$$\{(x, y, z) : -1 \leq 2x + y + 3z \leq 2, 1 \leq 2x - y + z \leq 3, -2 \leq 3x - 2z \leq 1\}$$

med densitet $f(x, y, z) = (3x - 2z)^2$.

Tips. Använd en passande substitution.

Svar: $\frac{9}{10}$