LINKÖPINGS TEKNISKA HÖGSKOLA
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

KURSKOD: TAIU08
Provkod: TEN1

TENTAMEN I MATEMATIK TAIU08/TEN1 (FLERVARIABELANALYS)
2023-08-21 KL 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Betrakta följande områden i x, y-planet:
   $D_1 = \{1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$, $D_2 = \{1 < x+y < 4, x \leq 0, y \geq 0\}$,
   $D_3 = \{1 \leq x^4 y \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$,
   (i) Rita D_1, D_2, D_3. Vilka av dem är kompakta? (2 p)
   Svar: D_1.
   (ii) Anta att f_i är en kontinuerlig funktion på D_i, där $i = 1, 2, 3$. Vilka av f_1, f_2, f_3 har säkert största samt minsta värde? (1 p)
   Svar: f_1.

2. Bestäm samtliga stationära punkter för $f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 + y^3 + 3$. Ange deras karaktär. Motivera fullständigt.
   Svar: $P_1(0, 0)$ är en str. lok. minimipunkt, $P_2(\frac{7}{12}, -\frac{7}{6})$ är en sadelpunkt.

3. Transformera uttrycket $U = \frac{1}{y} \cdot z'_x - z''_{xy} + 3$ genom att införa nya variablerna $u = ky$ och $v = xy$, där k är en konstant $\neq 0$.
   Funktionen z har kontinuerliga partiella derivator av ordning 2.
   Svar: $U = -uz''_{uv} - vz''_{vv} + 3$

4. Finn största och minsta värden av $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$ då $x^2 + y^2 \leq 14$.
   Svar: $\max f = 14 + 5\sqrt{10}$, $\min f = -3$

5. Beräkna integralen av $\int\int_D \frac{x^3 dxdy}{1+y^5}$, där
   $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2y \leq 1\}$.
   Svar: $\frac{4}{5}\ln(\frac{33}{32})$

6. Finn massan av kroppen $\Omega =$
   $\{(x, y, z) : 0 \leq x+y+z \leq 4,\ -1 \leq 2x+y+2z \leq 5,\ -2 \leq -x+y+z \leq 3\}$
   med densitet $d(x, y, z) = (2x + y + 2z)^2$.
   Svar: 420

   Tips: Använd en lämplig (även synlig) substitution.