Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2023-10-28 kl 08-13

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. Bestäm Taylorpolynom P_1 och P_2 av ordning 1 och 2 i punkten (1,2) till funktionen $f(x,y) = 5xy + 5y^2 - x^3 - x^2y^3$.

   Använd $h = x - 1$ och $k = y - 2$ för att skriva ner polynomen.

   Svar: Räkna: $f'_x = 5y - 3x^2 - 2xy^3$. $f'_y = 5x + 10y - 3x^2y^2$,

   $f''_{xx} = -6x - 2y^3$, $f''_{xy} = 5 - 6xy^2$, $f''_{yy} = 10 - 6x^2y$.

   Stoppa i punkten $(1,2)$ i funna uttryck och få fram:

   $P_1(h,k) = 21 - 9h + 13k$, $P_2(h,k) = 21 - 9h + 13k - 11h^2 - 19hk - k^2$

2. Låt $f(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy + 23$.

   (a) Vilka av punkterna $P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(1,1)$ är stationära för f ? (1p)
   Svar: Räkna $f'_x = 4xy + 2y^2 - 2xy^2 - 4y$, $f'_y = 2x^2 + 4xy - 2x^2y - 4x$.
   Kontrollera villkoret: $\nabla f(P) = \overline{0}$.
   Man får följande stationera punkter: P_1 och P_3.

   (b) Avgör karaktär av de funna stationära punkterna.
   Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former. (2p)
   Svar:
   Använd kvadratiska former i de stationera punkterna.
   Obs $Q_1(h,k) = -8hk$ (indefinit) och $Q_2(h,k) = 2h^2 + 2k^2$ (pos. definit). Då gäller att
   P_1 är en sadelpunkt. P_3 är en str. lok. minimipunkt.

3. Betrakta ekvationen $4y^2 \cdot z''_{xx} - 4y \cdot z''_{xy} + z''_{yy} - 2z'_x = 1$.

   (a) Transformera ekvationen till nya variabler $u = y^2 + x$ och $v = y$. (2 p)
   Svar: Räkna $u'_x = 1$, $u'_y = 2y$, $v'_x = 0$, $v'_y = 1$.
   Börja transformera. Använd kjedjeregeln:
   $z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x = z'_u$.
   Analogt: $z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y = 2y \cdot z'_u + z'_v$. Vidare:
   $z''_{xx} = (z'_x)'_x = z''_{uu}$, $z''_{xy} = (z'_x)'_y = (z'_u)'_x = 2y \cdot z''_{uu} + z''_{uv}$,
   $z''_{yy} = (z'_y)'_y = (2y \cdot z'_u + z'_v)'_y = (2y \cdot z'_u)'_y + (z'_v)'_y =$
   $2z'_u + 2y \cdot (z'_u)'_y + (z'_v)'_y = 2z'_u + 4y^2 z''_{uu} + 4yz''_{uv} + z''_{vv}$.

Insättning ger:
$z''_{vv} = 1$

(b) Lös ekvationen. (1 p)
(Funktionen z har kontinuerliga partiella derivator av ordning 2.)
Svar: Integrera ekv $z''_{vv} = 1$ två gånger m a p v.
Man får: $z = \frac{v^2}{2} + c(u) \cdot v + d(u)$, där $c(\cdot), d(\cdot)$ är C^2-en-variabel funktioner.
Återkom till gamla variablerna:
$z(x, y) = \frac{y^2}{2} + c(y^2+x) \cdot y + d(y^2+x)$, där $c(\cdot), d(\cdot)$ är C^2-en-variabel funktioner.

4. Finn största och minsta värden av $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3y$ då $x^2 + y^2 = 14$.

   Obs ett bivillkor.

   Svar: Obs att cirkeln $x^2+y^2 = 14$ är kompakt och $f(x, y)$ är kontinuerlig på cirkeln. Så finns det max och min för f.

   Obs ett bivillkor. Inför funktionen $g(x, y) = x^2 + y^2$.

   Kandidatjakt:

   Sätt systemet $(*)$:

   $\nabla f, \nabla g$ är lin. beroende, ekv (1), och $g = 14$, ekv (2).

   Transformera systemet $(*)$ till följande system:

   $y^2 - x^2 + 3x = 0$ (1) och $x^2 + y^2 = 14$ (2).

   Lös det nya systemet. Man får fyra lösningar:

   $P_1(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$, $P_2(\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2})$, $P_3(-2, \sqrt{10})$, $P_4(-2, -\sqrt{10})$.

   Beräkna $f(P_i), i \leq 4$, och välj max och min.

   $\max f = 14 + 5\sqrt{10}$ antas i punkten $P_3(-2, \sqrt{10})$,

   $\min f = 14 - 5\sqrt{10}$ antas i punkten $P_4(-2, -\sqrt{10})$,

5. Beräkna integralen $\int\int_D (3x^2 + xy)dxdy$,

   där D ges av olikheterna $-1 \leq 3x + y \leq 3,\ 0 \leq 2x - y \leq 2$.

   Svar: Använd substitutionen: $u = 3x + y, v = 2x - y$.

   Obs $x = \frac{u+v}{5}$ och $f(x(u, v), y(u, v)) = (\frac{u+v}{5}) \cdot u$,

   Vidare $D_{uv} = \{-1 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 2\}$, $|\frac{d(xy)}{d(uv)}| = \frac{1}{5}$.

   Så är $I = \int\int_{D_{uv}}((\frac{u+v}{5}) \cdot u \cdot \frac{1}{5})dudv = \frac{1}{25} \cdot \int\int_{D_{uv}}(u^2 + uv)dudv =$

   $\frac{1}{25} \cdot \int_{-1}^{3}(\int_0^2 (u^2 + uv)dv)du = \frac{16}{15}$

6. Finn massan av den kropp Ω i rummet som begränsas av paraboloiden $x^2 + y^2 = 5 - z$, cylindern $2 = x^2 + y^2$ och x, y-planet. Dessutom har kroppen densitet $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   Svar: Obs $5 > 2$. Så är $M = \int\int_{x^2+y^2\leq 2}(\int_0^{5-x^2-y^2}(\sqrt{x^2 + y^2})dz)dxdy =$

   $\int\int_{x^2+y^2\leq 2}(5 - x^2 - y^2) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}dxdy$.

   Använd polära koordinater.

Då är $M = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\sqrt{2}}(5-r^2)\cdot\sqrt{r^2}\cdot r d\phi)dr = \int_0^{2\pi}(\int_0^{\sqrt{2}}(5r^2-r^4)d\phi)dr = 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}(5r^2-r^4)dr$. Så är $M = \frac{76}{15}\pi\sqrt{2}$