Linköpings tekniska högskola
Matematiska institutionen
Vitalij Tjatyrko

Kurskod: TAIU08
Provkod: TEN1

Tentamen i Matematik TAIU08/TEN1 (Flervariabelanalys)
2024-01-04 kl 14-19

Inga hjälpmedel tillåtna.
Uppgifterna bedöms med 0-3 poäng.
15-18 poäng ger betyg 5, 11-14 poäng 4, 8-10 poäng 3.
Resultatet kommer inom två veckor.

1. (i) Bestäm alla kontinuerligt deriverbara funktioner $f(x, y)$ som uppfyller villkoren

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin x + xye^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (x-1)e^x + \cos y. \qquad (2p)$$

Svar: Obs $f(x,y) = \int(\sin x + xye^x)dx = -\cos x + y(xe^x - e^x) + c(y)$, där $c(y)$ är en godtycklig deriverbar funktion.
$\frac{\partial f}{\partial y} = (-\cos x + y(xe^x - e^x) + c(y))'_y = xe^x - e^x + c'(y) = (x-1)e^x + \cos y$. Jämför två sista uttryck och få: $c'(y) = \cos y$. Integrera: $c(y) = \sin y + d$, där d är en godtycklig konstatnt.
Sammanfatta: $f(x,y) = -\cos x + y(xe^x - e^x) + \sin y + d$, där d är en godtycklig konstatnt.

(ii) Ange de funktioner f som dessutom uppfyller villkoret $f(0,0) = 3$. Kontrollera svaret genom derivering. (1p)
Svar: Använd den allmänna lösningen från (i).
$f(0,0) = -1 + d = 3$. Få $d = 4$.
Sammanfatta: $f(x,y) = -\cos x + y(xe^x - e^x) + \sin y + 4$.
Gör kontroll genom derivering:
$(-\cos x + y(xe^x - e^x) + \sin y + 4)'_x = \sin x + xye^x$ och
$(-\cos x + y(xe^x - e^x) + \sin y + 4)'_y = (x-1)e^x + \cos y$.

2. (i) Transformera uttrycket $U = \frac{1}{y} \cdot z'_x - z''_{xy}$ genom att sätta $u = 2y$ och $v = xy$ (2p).
Svar: Transfirmera U:
Förberedelser: $u*_x = 0, u'_y = 2, v'_x = y, v'_y = x$.
Kedjeregeln ger: $z'_x = yz'_v$, $z''_{xy} = (z'_x)'_y = (yz'_v)'_y = z'_v + y(z'_v)'_y = z'_v + y(2z''_{vu} + xz''_{vv}) = z'_v + uz''_{uv} + vz''_{vv}$.
Sammanfatta: $U = -(uz''_{uv} + vz''_{vv})$.

(ii) Lös ekvationen $f''_{xx} = \frac{x}{y}$ (1p).
Svar: Obs $f''_{xx} = (f'_x)'_x$. Så $f'_x = \int \frac{x}{y} dx = \frac{1}{y}(\frac{x^2}{2} + c(y))$.
Integrera en gång till: $f(x,y) = \int f'_x dx = \int(\frac{1}{y}(\frac{x^2}{2} + c(y)))dx = \frac{1}{y}(\frac{x^3}{6} + xc(y) + d(y))$.

3. Låt $f(x,y) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2y^2 + 4xy + 24$.

(i) Vilka av punkterna $P_1(-1,-1), P_2(0,0), P_3(1,1)$ är stationära för f? (1p)
Svar: Kontrollera villkoret: $\nabla f(P) = \overline{0}$.
Obs $f'_x = 2x^2 - 2x + 4y$ och $f'_y = -4y + 4x$ och
$\nabla f(P_1) = \nabla f(P_2) = \overline{0}$, $f'_x(P_3) = 4 \neq 0$.
Så är P_1, P_2 stationära punkter och P_3 är ingen stationär punkt.

(ii) Avgör karaktär av de funna stationära punkterna. Motivera fullständigt när det gäller kvadratiska former. (2p)

Svar: Använd kvadratiska former i de stationära punkterna.

Förberedelser: $f''_{xx} = 4x - 2$, $f''_{xy} = 4$, $f''_{yy} = -4$.

Vi får: $Q_1(h,k) = -6h^2 + 8hk - 4k^2 = -(4(h-k)^2 + 2h^2)$, neg. definit.

P_1 är en str. lok. maximipunkt.

Vidare: $Q_2(h,k) = -2h^2 + 8hk - 4k^2 = -2((h-2k)^2 - 2k^2)$,

$Q_2(1,0) = -2 < 0$, $Q_2(2,1) = 4 > 0$, indefinit.

P_2 är en sadelpunkt.

4. På ellipsen $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ finn alla punkter som ligger närmast till origo samt det minsta avståndet.

Obs att ellipsen är kompakt och avståndet mellan en punkt (x,y) och origo är lika med $\sqrt{x^2+y^2}$, en kontinuerlig funktion på ellipsen.

Svar: Inför: $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $f(x,y) = d^2(x,y)$ och $g(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2$. Vi optimerar $f(x,y)$ under bivillkoret $g = 100$.

Obs $f(x,y)$ är kontinuerlig även på R^2 och ellipsen $g = 100$ är kompakt. Så problemet har lösningar som finns bland lösningar till systemet $(*)$: $\nabla f, \nabla g$ är lin. beroende (1), $g = 100$ (2).

Systemet $(*)$ $<=>$ systemet $(**)$:

$18xy + 12y^2 - 12x^2 = 0$ (1), $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$ (2)

som har följande lösningar: $P_1(2,-4), P_2(2,1)$, $P_3(-2,4), P_4(-2,-1)$.

Beräkna: $f(P_1) = f(P_3) = 20$ och $f(P_2) = f(P_4) = 5$.

Vi får $\min d = \sqrt{5}$ antas i punkterna P_2, P_4.

5. Beräkna integralen $\int\int_D (xy - 2x^2)\, dxdy$,

där D ges av olikheterna $0 \leq x+y \leq 1$, $1 \leq 2x - y \leq 3$.

Svar: Inför variabelbyte: $u = x+y$, $v = 2x - y$.

Obs $\frac{d(xy)}{d(uv)} = -\frac{1}{3}$, $D_{uv} = \{0 \leq u \leq 1, 1 \leq v \leq 3\}$ och $f(x(u,v), y(u,v)) = -v\frac{(u+v)}{3}$.

Då är integralen I lika med $\int\int_{D_{uv}} -v\frac{(u+v)}{3} \cdot |-\frac{1}{3}| dudv$.

Fortsätt: $I = -\frac{1}{9}\int_0^1 (\int_1^3 (uv + v^2) dv) du = -\frac{1}{9}\int_0^1 (4u + \frac{26}{3}) = -\frac{32}{27}$.

6. Finn volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = 21 - 4y$ och $z = x^2 + y^2$.

Svar: Obs att volymen V är lika med $\int\int_D ((21-4y) - (x^2+y^2))dxdy$.

Här är $D = \{x^2 + (y+2)^2 \leq 25\}$.

Variabelbyte 1: $x = v, y + 2 = u$.

Vi får: $V = \int\int_{u^2+v^2 \leq 25} (25 - u^2 - v^2) du dv$.

Variabelbyte 2: polära koordinater.

Vi får: $V = \int_0^5 (\int_0^{2\pi} (25 - r^2) \cdot r d\phi) dr$.

Beräkna integralen. Man får: $V = \pi \frac{625}{2}$.