Föreläsning 1

Kombinatorik

Definition (a) En *permutation* är ett arrangemang av ett antal objekt med hänsyn till deras ordning.
(b) En *kombination* är ett val av ett antal objekt utan hänsyn till deras ordning.

Exempel (a) Här är alla permutationer av objekten

$$A, B, C: \quad ABC,\ ACB,\ BAC,\ BCA,\ CAB,\ CBA,$$

(b) och här alla kombinationer:

$$ABC.$$

Tumregel För permutationer är ordningen viktig. För kombinationer är ordningen oviktig.

Exempel Vi har 3 objekt $A,\ B,\ C$. (a) Vi ska välja ut 2st. och ordna dem:

$$AB,\ BA,\ AC,\ CA,\ BC,\ CB.$$

(b) Vi ska välja ut 2st. utan att ordna dem:

$$AB,\ AC,\ BC.$$

Hur många möjligheter finns?

Multiplikationsprincipen. Betrakta ett experiment som utförs i k steg. Låt, for $i = 1, ..., k$ n_i vara antalet sätt som steg i kan utföras på. Det totala antalet sätt som experimenten kan utföras på blir då

$$n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Beteckning $\quad n! := 1 \cdot \ldots \cdot n, 0! := 1.$

Sats (a) Antalet sätt att arrangera i ordning (permutera) k olika objekt valda ur en mängd av n st. är

$$\frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

(b) Antalet sätt att välja k olika objekt ur en mängd av n st. utan hänsyn till deras ordning är

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beviset av (a) är en tillämpning av multiplikationsprincipen. Beviset av (b) följer från

$$\#\text{permutationer} = \#\text{kombinationer} \cdot k!\ .$$

$\square$

Exempel Fem bilar anländer till en parkeringsplats med sju rutor. På hur många sätt kan bilarna placeras in i rutorna?
Svar:

$$\frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

Exempel Man har 20 motorer av vilka 5 är defekta. Man väljer ut 3 för kontroll.
(a) Vad är antalet sätt att välja 3 felfria ?
Svar:

$$\binom{15}{3} = 455.$$

(b) Vad är antalet sätt att 2 är felfria och 1 är defekt?
Svar:

$$\binom{15}{2} \cdot \binom{5}{1} = 105 \cdot 5 = 525 \quad \text{enligt multiplikationsprincipen.}$$

Sats (permutationer med upprepning) Antalet sätt att arrangera i ordning (permutera) n objekt i k grupper som består av $n_1, \ldots, n_k$ likadana objekt $(n_1 + \ldots + n_k)$ är

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exempel Hur många permutationer finns?

$$ABRAKADABRA$$

Svar:

$$n = 11,\ n_1, = 5(A),\ n_2 = 2(B),\ n_3 = 1(D),\ n_4 = 1(K),\ n_5 = 2(R).$$

Det sökta antalet är

$$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = 83160.$$

Händelser och utfallsrum

Definition (a) Varje möjligt resultat av ett slumpförsök kallas ett utfall eller en elementarhändelse.
(b) Mängden av alla utfall kallar vi utfallsrummet. Beteckning S eller Ω.
(c) En händelse A är en mängd av utfall, dvs. $A \subseteq S$.

Grundläggande operationer med händelser

(1) A och B inträffar: $A \cap B$

(2) A eller B inträffar: $A \cup B$

(3) A inträffar inte: $\overline{A}$, A', A^c

(4) Om A och B utesluter varandra, dvs. omöjligt kan inträffa samtidigt, så säger vi att A och B är disjunkta eller oförenliga, dvs. $A \cap B = \emptyset$ där $\emptyset$ är den tomma mängden eller den *omöjliga händelsen*.

Observera att $\emptyset$ och utfallsrummet S själva är händelser.

Exempel (ogonfärg) Om båda, mamman och pappan, är av genotypen {blå, brun} (dvs. har ett blått och ett brunt anlag), så är avkommans genuppsättning en av följande,

$$S = \{(\text{blå}, \text{blå}), (\text{blå}, \text{brun}), (\text{brun}, \text{blå}), (\text{brun}, \text{brun})\}.$$

Intressanta händelser:

A: minst ett brunt anlag

$$A = \{(\text{blå}, \text{brun}), (\text{brun}, \text{blå}), (\text{brun}, \text{brun})\}.$$

B: minst ett blått anlag

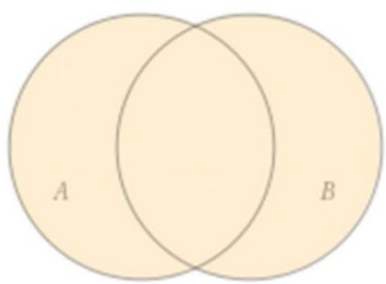
$$B = \{(\text{blå}, \text{blå}), (\text{blå}, \text{brun}), (\text{brun}, \text{blå})\}.$$

Det gäller att

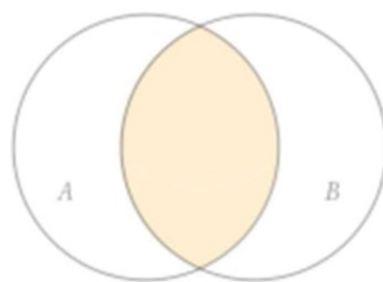
$$A \cap B = \{(\text{blå}, \text{brun}), (\text{brun}, \text{blå})\}, A \cup B = S.$$

Operationer med händelser, Representation i ett Venn-diagram, Räkneregler

Venn diagram och deras tillämpningar



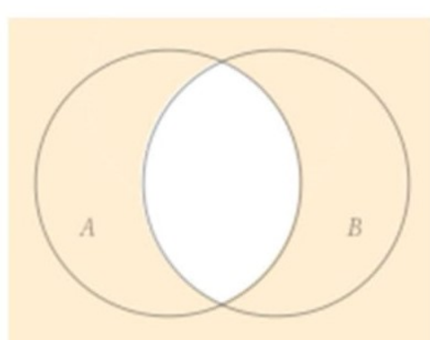
$A \cup B$



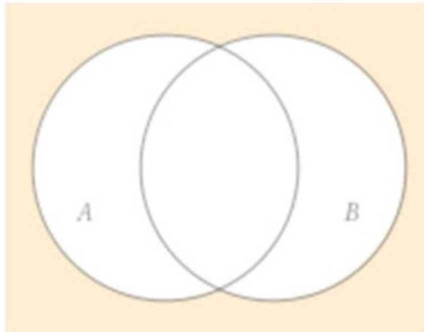
$A \cap B$

De Morgans regler

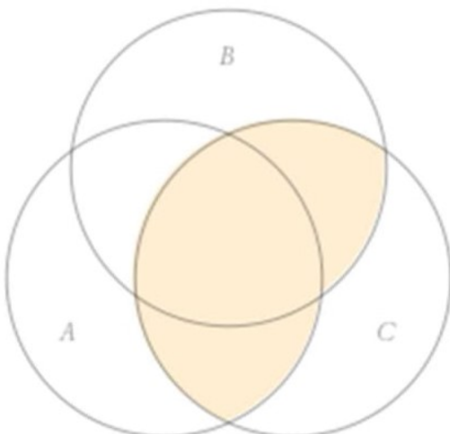
$(A \cap B)'$



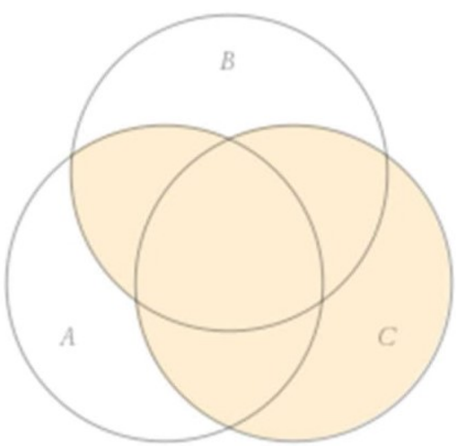
$= \quad A' \cup B'$

$(A \cup B)'$  $= \quad A' \cap B'$

De distributiva lagerna



$(A \cup B) \cap C$ $= \quad A \cap C \cup B \cap C$



$A \cap B \cup C$ $= (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Dessutom har vi

- **De kommutativa lagarna** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- **De associativa lagarna** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Den klassiska sannolikhetsdefinitionen

Antag att S består av m (möjliga) utfall $u_1, \ldots, u_m$, var och en med samma sannolikhet att inträffa. Vi skriver

$$P(u_k) = \frac{1}{m}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Betrakta en händelse $A \subseteq S$. Antag at A innehåller g (gynnsamma) utfall. Då säger vi att sannolikheten för A är

$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{\#\text{gynnsamma utfall}}{\#\text{möjliga utfall}}.$$

Jörg-Uwe Löbus, `jorg-uwe.lobus@liu.se`