Föreläsning 2

Sannolikhet

Exempel Vi kastar en tärning och är intresserade av händelsen

$$\{\text{vi får en sexa}\}.$$

Om det är en just tärning så säger man att sannolikheten av denna händelse är 1/6. Symboliskt skriver man

$$A = \{\text{vi får en sexa}\}, \quad P(A) = \frac{1}{6}.$$

Man observerar att om man kastar tärningen många gånger, så blir den relativa frekvensen av sexor ungefär 1/6. Allmänt sett, om vi har ett försök och är intresserade av händelsen A, och upprepar försöket n gånger, så gäller

$$\frac{\text{antalet gånger } A \text{ inträffar}}{n} \longrightarrow P(A)$$

då n växer.

Den här tillgången till sannolikhet kallas det *intuitiva eller statistiska sannolikhetsbegreppet*. Den moderna matematiken använder

Kolmogorovs axiomsystem

Sannolikhet (eller ett sannolikhetsmått) P är en funktion av händelser sådan att

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) Om $A_1, A_2, \ldots$ är oförenliga (disjunkta) händelser, så gäller

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

som innehåller $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ om man bara betraktar ändligt många händelser $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Sats (Räkneregler för sannolikheter)

(a) $P(E^c) = 1 - P(E)$.

(b) $P(\emptyset) = 0$.

(c) Om $E \subseteq F$ *(*E *medför* F*), så gäller* $P(E) \leq P(F)$.

(d) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$.

Bevis.

(a) Axiom (iii) medför

$$P(E) + P(E^c) = P(E \cup E^c) = P(S).$$

Axiom (ii) säger nu

$$P(E) + P(E^c) = 1.$$

Alltså

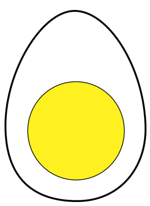
$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

(b) $\emptyset = S^c$. Alltså (med (a))

$$P(\emptyset) = P(S^c) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0.$$

(c) F: hela ägg , E: det gula i ägget , $E^c \cap F$: det vita i ägget ,

$$F = E \cup (E^c \cap F) \ ,$$



Google Bild

en union av två oförenliga (disjunkta) händelser. Således

$$P(F) = P(E) + P\left(E^c \cap F\right) \geq P(E)$$

enligt axiom (iii) och (i).

(d)

$$E \quad \text{och} \quad F \setminus (E \cap F)$$

är två oförenliga (disjunkta) händelser med

$$E \cup F = E \cup F \setminus (E \cap F) \, .$$

Enligt axiom (iii),

$$P(E \cup F) = P(E) + P\left(F \setminus (E \cap F)\right) \ . \tag{1}$$

Dessutom är

$$E \cap F \quad \text{och} \quad F \setminus (E \cap F)$$

två oförenliga (disjunkta) händelser med

$$F = (E \cap F) \cup (F \setminus (E \cap F)) \, .$$

Alltså

$$P\left(F \setminus (E \cap F)\right) = P(F) - P(E \cap F) \tag{2}$$

på grund av axiom (iii). Ekvation (2) in (1) ger del (d). $\square$

Exempel Jennifer tar med sig två böcker på semester. Med sannolikhet 0.5 gillar hon den första boken. Med sannolikhet 0.4 gillar hon den andra boken. Med sannolikhet 0.3 gillar hon båda böckerna. Bestäm sannolikheten att hon inte gillar någon av de två böckerna.

Svar: Vi betraktar händelserna

$$B_i := \{\text{Jennifer gillar bok } i\}, \quad i = 1, 2.$$

Sannolikheten att hon gillar minst en av de båda böckerna, dvs $P(B_1 \cup B_2)$, är

$$\begin{aligned} P(B_1 \cup B_2) &= P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\ &= 0.5 + 0.4 - 0.3 = 0.6\,. \end{aligned}$$

Händelsen att Jennifer inte gillar någon bok, $B_1^c \cap B_2^c$, är komplementet till att hon gillar minst en av de båda böckerna, se De Morgans regler. Alltså

$$P(B_1^c \cap B_2^c) = 1 - P(B_1 \cup B_2) = 1 - 0.6 = 0.4\,.$$

Kom ihåg den klassiska sannolikheten. Betrakta en händelse $A \subseteq S$. Antag att A innehåller g (gynnsamma) utfall av totalt m möjliga utfall. Om alla utfall anses lika sannolikt, så säger vi att sannolikheten för A är

$$P(A) = \frac{g}{m} = \frac{\#\text{gynnsamma utfall}}{\#\text{möjliga utfall}}\,.$$

Två urnmodeller

I en urna finns kulor av två slag:

Google Bild

- v vita kulor,
- s svarta kulor.

(1) Dragning utan återläggning

Drag $n \leq v + s$ kulor slumpmässigt och så att en kula som dragits inte stoppas tillbaka, dvs dragning *utan återläggning*. Låt

$$S = \{\text{alla uppsättningar om } n \text{ kulor utan hänsyn till ordning}\}\,.$$

Bestäm sannolikheten för

$$A = \{\text{man får } k \text{ vita kulor i ett urval av } n\}$$

där $k \le v$ och $n - k \le s$. Här får vi

$$m = \binom{v+s}{n} \quad \text{och} \quad g = \binom{v}{k} \cdot \binom{s}{n-k}$$

där vi har använt multiplikationsprincipen. Vi får

$$P(A) = \frac{\binom{v}{k} \cdot \binom{s}{n-k}}{\binom{v+s}{n}} .$$

Denna urnmodell kallas också *hypergeometrisk urnmodell.*

(2) Dragning med återläggning

Här betraktas samma modell, men kulorna stoppas tillbaka efter att man har observerat dess färg. Låt

$$S = \{\text{alla uppsättningar om } n \text{ kulor med hänsyn till ordning}\} .$$

För att bestämma sannolikheten av

$$A = \{\text{man får } k \text{ vita kulor i ett urval av } n\}$$

använder vi det klassiska sannolikhetsbegreppet. Antalet m av alla möjliga utfall bestäms med hjälp av multiplikationsprincipen,

$$m = (v+s)^n .$$

För antalet g av alla gynnsamma utfall antar vi att vi valt ut k vita och $n-k$ svarta kulor. Dessa kan placeras på $\binom{n}{k}$ sätt in i n platser, till exempel

v	s	s	$\cdots$	v	v	s

.

- Antalet sätt att välja ut k vita kuluor på platserna som är markerade med v är v^k.
- Antalet sätt att välja ut $n-k$ svarta kulor på platserna som är markerade med s är s^{n-k}.

Detta ger

$$g = \binom{n}{k} \cdot v^k \, s^{n-k} .$$

Således

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{n}{k} \cdot v^k \, s^{n-k}}{(v+s)^n} \\ &= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{v}{v+s}\right)^k \cdot \left(\frac{s}{v+s}\right)^{n-k} . \end{aligned}$$

Betecknar man med

$$p = \frac{v}{v+s}$$

sannolikheten för att dra en vit kula under en enskild dragning, så får man

$$P(A) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} .$$

Denna urnmodell kallas ibland den *binomiala urnmodellen.*

Oberoende händelser – en motivering

P({motor nr 1 fungerar})=P({motor nr 2 fungerar})=0.9   medför

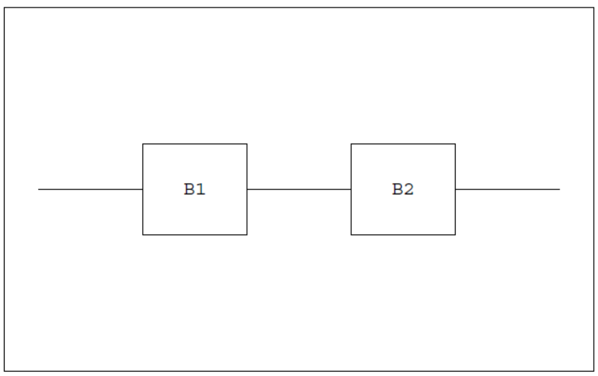
P({motorsystemet fungerar})=0.81, varför?

Här är ett exempel på ett seriekopplat system:

B_1: motor nr 1 fungerar

B_2: motor nr 2 fungerar

$B_1 \cap B_2$: motorsystemet fungerar



A_1: huvudmotorn fungerar

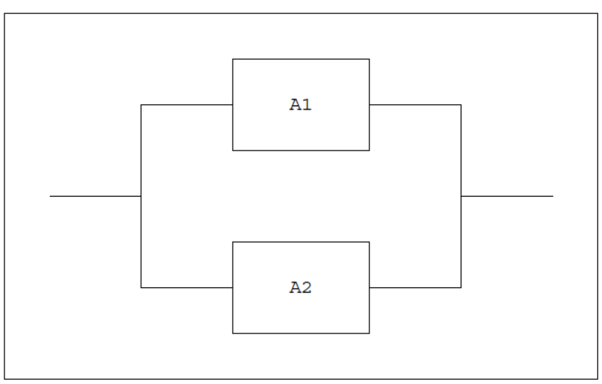
A_2: reservmotorn fungerar

$A_1 \cup A_2$: motorsystemet fungerar

$P(A_1) = 0.9,\ P(A_2) = 0.9,\ P(A_1 \cap A_2) = 0.9^2 = 0.81$

Vad blir $P(A_1 \cup A_2)$?

Ett sådant här tillförlitlighetssystem brukar kallas parallellkopplat.



P({motorsystemet fungerar})=0.99, varför?

Jörg-Uwe Löbus, jorg-uwe.lobus@liu.se