# TAMS14/36 SANNOLIKHETSLÄRA GK
# TAMS15/79 MATEMATISK STATISTIK I GK
# Poissonprocessen (komplettering)

Torkel Erhardsson

2 december 2015

# 1 Stokastiska processer

**Definition 1.1** *En* **stokastisk process** *är en familj* $\{X(t); t \in T\}$ *(kan även skrivas* $\{X_t; t \in T\}$*) av stokastiska variabler, definierade på ett utfallsrum* $\Omega$*, och indexerade av en mängd* $T$ *(indexmängden).*

Några kommentarer till denna definition:

1. $T$ betraktas ofta som en mängd av *tidpunkter*. Om $T = \mathbb{Z}_+$ (de ickenegativa heltalen) eller $T = \mathbb{Z}$ (heltalen), så kallas $\{X(t); t \in T\}$ en stokastisk process *i diskret tid*. Om $T = \mathbb{R}_+$ (de ickenegativa reella talen) eller $T = \mathbb{R}$ (de reella talen), så kallas $\{X(t); t \in T\}$ en stokastisk process *i kontinuerlig tid*.

2. $X(t)$ kallas ofta processens *värde* (eller *tillstånd*) vid tid $t$.

3. För varje fixt *utfall* $\omega$ i utfallsrummet $\Omega$ kan man definiera en funktion från $T$ till $\mathbb{R}$, genom att låta funktionens värde vid tid $t$ vara den stokastiska variabeln $X(t)$:s värde för utfallet $\omega$. Denna funktion kallas den stokastiska processens *realisering* (eller *trajektoria*) för utfallet $\omega$.

**Exempel 1.1** Ett exempel på en stokastisk process i diskret tid är en följd av oberoende och lika fördelade stokastiska variabler $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$. Andra exempel, där processens värden vid olika tidpunkter är *beroende* stokastiska variabler, är martingaler, stationära stokastiska processer, och markovkedjor. Dessa studeras i flera av fortsättningskurserna i matematisk statistik, till exempel TAMS32 Stokastiska processer.

**Exempel 1.2** Låt $X$ och $Y$ vara stokastiska variabler, och låt $Z(t) = Xt + Y$ för varje $t \in \mathbb{R}$. Då är $\{Z(t); t \in \mathbb{R}\}$ en stokastisk process i kontinuerlig tid. Dess realiseringar är räta linjer.

# 2 Poissonprocessen

**Definition 2.1** *En* **Poissonprocess** *med* **intensitet** $\lambda$ *(där* $\lambda > 0$*) är en stokastisk process i kontinuerlig tid* $\{X(t); t \geq 0\}$ *med följande egenskaper:*

1. *Processens värde vid tid* $t$*,* $X(t)$*, är en ickenegativt heltalsvärd stokastisk variabel (för varje* $t \geq 0$*), och* $X(0) \equiv 0$*.*

2. *Processens realiseringar är* ickeavtagande *funktioner.*

3. *För varje följd av tidpunkter* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ *gäller att processens* inkrement $X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1), X(t_3)-X(t_2), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$ *är* oberoende *stokastiska variabler.*

4. *För varje* $t \geq 0$ *gäller att* $P(X(t+h) - X(t) = 1) = \lambda h + o(h)$ *då* $h \downarrow 0$.

5. *För varje* $t \geq 0$ *gäller att* $P(X(t+h) - X(t) > 1) = o(h)$ *då* $h \downarrow 0$.

Kommentarer:

1. Med $o(h)$ menas (på vanligt sätt) en restterm sådan att $\lim_{h\downarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

2. Det följer av egenskaperna 4–5 att $P(X(t+h) = X(t)) = 1-\lambda h+o(h)$ då $h \downarrow 0$.

Poissonprocessen används ofta då man vill beskriva händelser av en viss typ som inträffar “fullständigt slumpmässigt i tiden”; till exempel: kunders ankomst till en butik; anrop till en telefonväxel; emissioner av partiklar från ett radioaktivt preparat, o.s.v. Poissonprocessens värde vid tid $t$, $X(t)$, anger då hur många sådana händelser som inträffar under tidsintervallet $[0, t]$. Intensiteten $\lambda$ kan tolkas som det *förväntade antalet* händelser *per tidsenhet*, vilket framgår av följande sats, som också förklarar namnet “Poissonprocess”:

**Sats 2.1** *Låt* $\{X(t); t \geq 0\}$ *vara en Poissonprocess med intensitet* $\lambda > 0$. *För varje* $0 \leq t_1 < t_2$ *gäller då att* $X(t_2) - X(t_1) \sim \mathrm{Po}(\lambda(t_2 - t_1))$.

*Bevisskiss:* Låt $L = t_2 - t_1$. För varje $N = 1, 2, \ldots$ gäller att

$$X(t_2) - X(t_1) = \sum_{i=1}^{N}(X(t_1 + i\frac{L}{N}) - X(t_1 + (i-1)\frac{L}{N})),$$

där termerna i summan är oberoende stokastiska variabler (enligt egenskap 3 ovan). Antag nu att $N$ är stort. Enligt egenskap 4–5 ovan gäller:

$$P(X(t_1 + i\frac{L}{N}) - X(t_1 + (i-1)\frac{L}{N}) = x) \approx \begin{cases} \frac{\lambda L}{N}, & x = 1; \\ 1 - \frac{\lambda L}{N}, & x = 0. \end{cases}$$

Det gäller därför att $X(t_2) - X(t_1) \approx \mathrm{Bin}(N, \frac{\lambda L}{N})$. Eftersom $N$ är stort, gäller vidare att $\mathrm{Bin}(N, \frac{\lambda L}{N}) \approx \mathrm{Po}(\lambda L)$. (Ett fullständigt bevis baserat på denna skiss, där man visar att sannolikhetsfördelningen för högerledet konvergerar "i fördelning" mot $\text{Po}(\lambda L)$ då $N \to \infty$, kan konstrueras med hjälp av sannolikhetsgenererande funktioner; se kursen TAMS46 Sannolikhetslära fk.)

*Alternativt bevis:* Här nöjer vi oss med att visa att $X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$. Låt $P_n(t) = P(X(t) = n)$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$; vi ska alltså visa att $P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Det gäller att

$$P_0(t+h) = P(X(t+h) = 0|X(t) = 0)P_0(t) = (1-\lambda h+o(h))P_0(t) \quad \text{då } h \downarrow 0,$$

där egenskap 4–5 utnyttjades. Subtrahera med $P_0(t)$ och dela med $h$ i båda led, och låt $h \downarrow 0$, så fås differentialekvationen

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t),$$

med begynnelsevillkoret $P_0(0) = 1$, vilken har lösningen $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Ett liknande, men mer komplicerat resonemang för $n \geq 1$ (använd lagen om total sannolikhet och egenskap 4–5) ger sedan:

$$P_n(t+h) = P(X(t+h) = n|X(t) = n)P_n(t)$$

$$+P(X(t+h) = n|X(t) = n-1)P_{n-1}(t)+P(\{X(t) \leq n-2\}\cap\{X(t+h) = n\})$$

$$= (1 - \lambda h + o(h))P_n(t) + (\lambda h + o(h))P_{n-1}(t) + o(h) \quad \text{då } h \downarrow 0.$$

Subtrahera med $P_n(t)$ och dela med $h$ i båda led, och låt $h \downarrow 0$, så fås

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad \forall n \geq 1,$$

med begynnelsevillkoren $P_n(0) = 0$ för $n \geq 1$. (Anmärkning: strängt taget är de ovan angivna derivatorna högerderivator, men man kan visa att också vänsterderivatorna existerar och uppfyller samma differentialekvationer.)

Vi använder sedan matematisk induktion. Antag att $P_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Detta är enligt vad vi har visat uppfyllt för $n = 1$. Induktionsantagandet insatt i den andra differentialekvationen ger:

$$\frac{d}{dt}\big[e^{\lambda t}P_n(t)\big] = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!},$$

vilket tillsammans med begynnelsevillkoren ger:

$$e^{\lambda t}P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!},$$

vilket visar att $P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. ∎

**Sats 2.2** *Låt* $\{X(t); t \geq 0\}$ *vara en Poissonprocess med intensitet* $\lambda > 0$. *Låt*

$$T_k = \inf\{t > 0; X_t = k\} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

*Då gäller att* $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \ldots$ *är oberoende och* exp$(\lambda)$*-fördelade stokastiska variabler.*

*Bevis:* Vi visar enbart att $T_1 \sim \exp(\lambda)$. Definitionsmässigt är $T_1 > 0$. För $t > 0$ gäller, eftersom $X(t) \sim \text{Po}(\lambda t)$:

$$P(T_1 \leq t) = P(X(t) \geq 1) = 1 - P(X(t) = 0) = 1 - e^{-\lambda t},$$

vilket är fördelningsfunktionen för en exp$(\lambda)$-fördelning. ∎

Kommentarer:

1. Sats 2.2 visar att Poissonprocessens realiseringar är *styckvis konstanta* funktioner, som växer enbart genom "hopp" (diskontinuiteter), och då alltid från ett heltalsvärde till *närmast högre* heltalsvärde. Den stokastiska variabeln $T_k$ är den tidpunkt då processen hoppar från värdet $k - 1$ till värdet $k$.

2. Omvändningen till sats 2.2 gäller också. Låt $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ vara oberoende exp$(\lambda)$-fördelade stokastiska variabler, och låt

$$X(t) = \max\{k = 0, 1, 2, \ldots; \sum_{i=1}^{k} Z_i \leq t\} \qquad \forall t \geq 0.$$

   Då är $\{X(t); t \geq 0\}$ en Poissonprocess med intensitet $\lambda$, vars hopptidpunkter är $T_k = \sum_{i=1}^{k} Z_i$, $k = 1, 2, \ldots$. Detta bevisar vi inte.

Som avslutning ger vi utan bevis ett par satser som behandlar *återstartade* Poissonprocesser, respektive *superposition* av Poissonprocesser.

**Sats 2.3** *Låt* $\{X(t); t \geq 0\}$ *vara en Poissonprocess med intensitet* $\lambda > 0$. *Fixera* $t_0 \geq 0$, *och låt* $Y(t) = X(t_0 + t) - X(t_0)$ *för* $t \geq 0$. *Då är* $\{Y(t); t \geq 0\}$ *en Poissonprocess med intensitet* $\lambda$.

**Sats 2.4** *Låt* $\{X_1(t); t \geq 0\}$ *och* $\{X_2(t); t \geq 0\}$ *vara oberoende Poissonprocesser med intensiteterna* $\lambda_1 > 0$ *respektive* $\lambda_2 > 0$. *Låt* $Y(t) = X_1(t) + X_2(t)$ *för* $t \geq 0$. *Då är* $\{Y(t); t \geq 0\}$ *en Poissonprocess med intensitet* $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.