LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 15 / TEN 1

18 januari 2020, klockan 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistik utgiven av MAI, och ett ytterligare formelblad (ett blad med text på båda sidorna).

(1) De stokastiska variablerna X och Y har den simultana täthetsfunktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{om } 0 \le x \le 1 \text{ och } 0 \le y \le 1 \\ \frac{1}{2} & \text{om } 1 \le x \le 2 \text{ och } 1 \le y \le 2 \\ 0 & \text{för alla övriga } (x,y) \end{cases}$$

(a) Beräkna de marginella täthetsfunktionerna för X och Y. (1p)
(b) Beräkna $Cov(X,Y)$. (1p)
(c) Beräkna korrelationen mellan X och Y. (1p)

(2) En Markovkedja X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, med tillståndsrum $\{0, 1, 2\}$ har övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & & 1/3 \\ 1/2 & 0 & \\ & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Fyll i de tomma platserna i övergångsmatrisen ovan. (0.5p)
(b) Beräkna 2-stegsövergångsmatrisen, dvs. $\mathbf{P}^{(2)}$. (0.5p)
(c) Om startfördelningen är

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{(0)} &= \left(p^{(0)}(0), p^{(0)}(1), p^{(0)}(2)\right) \equiv (P(X_0 = 0), P(X_0 = 1), P(X_0 = 2)) \\ &= (1/3, 1/3, 1/3)\end{aligned}$$

beräkna fördelningen vid tid 2,

$$\mathbf{p}^{(2)} = \left(p^{(2)}(0), p^{(2)}(1), p^{(2)}(2)\right) \equiv (P(X_2 = 0), P(X_2 = 1), P(X_2 = 2)).$$

(1p)

(d) Beräkna alla stationära fördelningar. (1p)

(3) En Astronom vill mäta (i ljusår) avståndet mellan sitt observatorium och en viss stjärna. Han vet att varje gång han mäter avståndet får han inte avståndet exakt. Därför mäter astronomen avståndet många gånger och använder medelvärdet av sina mätningar som en definitiv skattning för avståndet. Han antar att värden av mätningarna är oberoende och likafördelade stokastiska variabler som har väntevärdet d (det riktiga avståndet i ljusår) och variansen 4 (ljusår^2).

(a) Antag att astronomen mäter avståndet 25 gånger. Bestäm sannolikheten att hans skattning överstiger $d + 0.5$ ljusår. (1p)

(b) Hur många mätningar behöver han för att hans skattning skulle vara med sannolikhet 0.95 inom ± 0.5 ljusår från det riktiga avståndet d? (2p)

Ledning: Använd centrala gränsvärdessatsen.

(4) Anta att 1% av populationen är snarkare. Vi tar en person från populationen på måfå och vill veta om han/hon är snarkare eller inte. Testet man kan använda ger ett rätt svar med sannolikhet 0.99 oavsett man är snarkare eller inte.

(a) Bestäm sannolikheten att testet säger att en person tagen på måfå är snarkare. (1.5p)

(b) Anta att testet säger att den valda personen är snarkare. Hur stor är då sannolikheten att han/hon faktisk är snarkare? (1.5p)

(5) En person åker först med buss 1, sedan med buss 2. Väntetiderna X och Y är oberoende och likformigt fördelade över intervallet $(0, 10)$ respektive $(0, 8)$, där enheten är minuter. Bestäm sannolikheten att personen får vänta sammanlagt minst 16 minuter på de båda bussarna. (3p)

(6) $X_1, \ldots, X_n$ är oberoende stokastiska variabler som alla är $N(\mu, 0.2)$, dvs. normalfördelade med väntevärde μ och standardavvikelse 0.2 .

(a) Ange fördelningen (typ och parametrar) för $\bar{X} - \mu$ där $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. (0.5p)

(b) Beräkna $P(|\bar{X} - \mu| > 0.2/\sqrt{n})$. (1p)

(c) Beräkna $P(|\bar{X} - \mu| > 0.1)$ om $n = 16$. (0.5p)

(d) Hur stort måste n vara för att $P(|\bar{X} - \mu| > 0.01)$ skall understiga 0.001? (1p)

Ledning: Använd $\Phi(3.29) = 1 - 0.0005$.

Lösningar

(1) (a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{om } x \in [0,2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

och

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{om } y \in [0,2] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

(b) $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$$E[XY] = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 xy\,dxdy + \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 xy\,dxdy = \frac{5}{4},$$

$$E[X] = \int_0^2 x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2}\,dx = 1.$$

På grund av symmetri gäller att $E[Y] = E[X]$. Slutligen fås $Cov(X,Y) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

(c) Korrelationen ges av $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$.

$$E[X^2] = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left(\int_0^1 dy\right)dx + \frac{1}{2}\int_1^2 x^2\left(\int_1^2 dy\right)dx = \frac{4}{3}$$

$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3}$. På grund av symmetri följer att $Var(Y) = Var(X)$. Således blir $\rho(X,Y) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2}} = \dfrac{3}{4}$.

(2) (a)

$$\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j=0,1,2} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$

(b)

$$\mathbf{P}^2 = (p^2_{ij})_{i,j=0,1,2} = \begin{pmatrix} 4/9 & 5/18 & 5/18 \\ 5/12 & 5/12 & 1/6 \\ 5/12 & 1/6 & 5/12 \end{pmatrix} .$$

(c)

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^2 = \left(\frac{23}{54}, \frac{31}{108}, \frac{31}{108}\right) .$$

(d) Kedjan är irreducibel och aperiodisk, se $\mathbf{P}^2$. Således finns det en entydig stationär fördelning π som lösning till $\pi = \pi\mathbf{P}$,

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (3/7, 2/7, 2/7) .$$

(3) Låt X_i beteckna resultatet av den $i:e$ mätningen och $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Här har vi $n = 25$. Sökt är

$$P\left(\overline{X} > d + 0.5\right) .$$

Det gäller att

$$\begin{aligned}P\left(\overline{X} > d + 0.5\right) &= 1 - P\left(\overline{X} \leq d + 0.5\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{\overline{X} - E[X_1]}{D(X_1)/\sqrt{n}} \leq \frac{0.5}{2/5}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(1.25) = 0.1056 .\end{aligned}$$

(b) Sökt är n sådan att

$$0.95 = P\left(d - 0.5 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \leq d + 0.5\right) .$$

Enligt Centrala gränsvärdessatsen

$$0.95 = P\left(-0.5\frac{\sqrt{n}}{2} \leq \frac{\overline{X} - d}{2/\sqrt{n}} \leq 0.5\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right) .$$

Detta ger också

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.975 .$$

Ur tabellen fås

$$\frac{\sqrt{n}}{4} \approx 1.96 \quad \text{som medför att} \quad n \approx (4 \cdot 1.96)^2 = 61.5 .$$

Astronomen behöver alltså 62 mätningar.

(4) Låt

$$E = \{\text{en person tagen på måfå är snarkare}\}$$

och

$$F = \{\text{testet säger att en person tagen på måfå är snarkare}\} .$$

Då är

$$P(E) = 0.01 , \quad P(F|E) = P(F^c|E^c) = 0.99$$

och

$$P(F|E^c) = 1 - P(F^c|E^c) = 1 - 0.99 = 0.01 .$$

(a) Lagen om total sannolikhet ger

$$P(F) = P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c) = 0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99 = 0.0198 .$$

(b) Från Bayes Formel får vi

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99} = \frac{1}{2} .$$

(5) Se lösningar till lektionsuppgifter, 4.6.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 6.18.