# LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

# EXAM TAMS 15 / TEN 1

17 mars 2020, klockan 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistik utgiven av MAI, och ett ytterligare formelblad (ett blad med text på båda sidorna).

(1) Låt $(X, Y)$ vara en tvådimensionell kontinuerlig stokastisk variabel där $X$ och $Y$ är icke-negativa och oberoende.

(a) Visa att $P(X < Y) = \int_0^\infty F_X(y) f_Y(y) dy$ där $F_X$ är fördelningsfunktionen för $X$ och $f_Y$ betecknar täthetsfunktionen för $Y$. (2p)

(b) Beräkna ovanstående i fallet då $X \sim Exp(\lambda_1)$ och $Y \sim Exp(\lambda_2)$. (1p)

(2) Bland tolvåringarna i ett visst land gäller att pojkarnas längd följer en normalfördelning med väntevärde 153,8 och standardavvikelse 9,4 (enhet: cm). Bland flickorna i samma land är längden normalfördelad med väntevärde 156,6 och standardavvikelse 5,5.

(a) Man väljer ut tio pojkar på måfå, mäter deras längd och räknar ut medelvärdet. Vad är sannolikheten att resultatet blir mer än 155? (1p)

(b) Man väljer ut en pojke och en flicka på måfå. Vad är sannolikheten att pojken är längre än flickan? (2p)

(3) Händelser inträffar enligt en Poissonprocess med intensitet 1 per timme. Processen börjar klockan 8.00 och avbryts mellan klockan 12.00 och klockan 13.00.

(a) Vad är sannolikheten att den första händelsen inträffar någon gång mellan klockan 8.30 och 9.15. (1p)

(b) Anta att högst en händelse inträffade till klockan 10.00. Beräkna sannolikheten för att exakt 6 händelser inträffade till klockan 14.00. (2p)

(4) Ett försäkringsbolag säljer en försäkringstyp där ersättningsbeloppet till en given kund under ett givet år beskrivs av en stokastisk variabel med väntevärde 50 kronor och standardavvikelse $\sigma$ kronor. Bolaget har sålt försäkringen till 400 kunder och vi antar att dessa drabbas av skador oberoende av varandra.

(a) Om $\sigma = 100$, vad är sannolikheten att bolaget under ett givet år sammanlagt måste betala ut mer än 22 000 kronor? Använd centrala gränsvärdessatsen. (2p)

(b) Hur litet måste $\sigma$ vara för att sannolikheten att bolagets sammanlagda utbetalning under ett givet år ska överstiga 22 000 kronor ska vara 1%? Använd centrala gränsvärdessatsen. (1p)

(5) (a) Bestäm konstanten $c$ så att

$$f(x) = \begin{cases} c/\sqrt{x+1} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases} .$$

blir en täthetsfunktion. (1.5p)

(b) Beräkna sannolikheten att en stokastisk variabel med denna täthetsfunktion antar ett positivt värde. (1.5p)

(6) En partikel utför en symmetrisk slumpvandring på hörnen av en kvadrat, så att den i varje steg, med lika sannolikhet, flyttar sig till något av de två intilliggande hörnen.

(a) Beskriv partikels slumpvandring som en Markovkedja, d.v.s. bestäm övergångsmatrisen. (1p)

(b) Bestäm väntevärdet för antalet steg tills partikeln den första gången återkommer till starthörnet. (2p)

# Lösningar

(1) (a) Eftersom $X$ och $Y$ är icke-negativa och oberoende, får vi att

$$\begin{aligned} P(X < Y) &= \int_0^\infty \int_0^y f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^y f_X(x)\,dx \right) f_Y(y)\,dy \\ &= \int_0^\infty F_X(y) f_Y(y)\,dy\,. \end{aligned}$$

(b) Man har då att $F_X(y) = 1 - e^{-\lambda_1 y}$ och $f_Y(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}$, vilket insatt i uttrycket från (a) ger

$$P(X < Y) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda_1 y}\right) \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\,dy = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\,.$$

(2) (a) Medelvärdet $\bar{X}$ av tio slumpvis utvalda pojkars längd är normalfördelad med väntevärde 153,8 och standardavvikelse $9,4/\sqrt{10} \approx 2,97$. Alltså är

$$P\left(\bar{X} > 155\right) = 1 - \Phi\left(\frac{155 - 153,8}{2,97}\right) \approx 0,345\,.$$

(b) Om $X$ är längden av en slumpvis vald pojke och $Y$ är längden av en slumpvis vald flicka så är $X - Y$ normalfördelad med väntevärde $153,8 - 156.6 = -2,8$ och varians $(9,4)^2 + (5,5)^2 = 118,61$ dvs. standardavvikelse $\sqrt{118,61} \approx 10,9$. Den händelse vars sannolikhet vi söker kan skrivas $\{X - Y > 0\}$. Sannolikheten är

$$1 - \Phi\left(\frac{2,8}{10,9}\right) \approx 0,397\,.$$

(3) Låt $X(t)$ vara antalet händelser under tidsintervallet $[0,t]$, dvs. $[0,4]$ motsvarar kl. 8.00-12.00 och $(4,\infty)$ motsvarar tiden från kl. 13.00. $X(t)$ är Poissonfördelad med parameter $t = t \cdot \lambda$ eftersom $\lambda = 1$.

(a) Låt $T_1$ vara tiden som den första händelsen inträffar. Eftersom $T_1$ är exponentialfördelad med parameter $\lambda = 1$ får vi

$$P\left(\tfrac{1}{2} < T \le \tfrac{5}{4}\right) = F_T(\tfrac{5}{4}) - F_T(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} - e^{-5/4} = 0.32\,.$$

(b) För $k = 5$ och $s = 3$,

$$\begin{aligned} P(N(s+2) = k+1 | N(2) \le 1) &= \frac{P(N(s+2) = k+1, N(2) \le 1)}{P(N(2) \le 1)} \\ &= \frac{P(N(s+2) = k+1, N(2) = 0)}{P(N(2) \le 1)} + \frac{P(N(s+2) = k+1, N(2) = 1)}{P(N(2) \le 1)} \\ &= \frac{P(N(s+2) - N(2) = k+1, N(2) = 0)}{P(N(2) \le 1)} \\ &\quad + \frac{P(N(s+2) - N(2) = k, N(2) = 1)}{P(N(2) \le 1)} \\ &= \frac{P(N(s+2) - N(2) = k+1) \cdot P(N(2) = 0)}{P(N(2) \le 1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + \frac{P(N(s+2)-N(2)=k)\cdot P(N(2)=1)}{P(N(2)\le 1)} \\
&= \frac{P(N(s)=k+1)\cdot P(N(2)=0)}{P(N(2)\le 1)} + \frac{P(N(s)=k)\cdot P(N(2)=1)}{P(N(2)\le 1)} \\
&= \frac{e^{-s\lambda}}{1+2\lambda}\left(\frac{(s\lambda)^{k+1}}{(k+1)!} + 2\lambda\frac{(s\lambda)^k}{k!}\right).
\end{aligned}
$$

(4) (a) Eftersom Y är en summa av 400 st oberoende likafördelade stokastiska variabler kan vi använda oss av centrala gränsvärdessatsen för att beräkna sannolikheten att $Y > 22\ 000$ enligt

$$P(Y > 22\ 000) = P\left(\frac{Y - 400\cdot 50}{\sigma\cdot\sqrt{400}} > \frac{22\ 000 - 400\cdot 50}{\sigma\cdot\sqrt{400}}\right) \approx P\left(Z > \frac{100}{\sigma}\right)$$

där $Z \sim N(0,1)$, vilket tillsammans med symmetriargument och $\sigma = 100$ ger att

$$P(Y > 22\ 000) \approx 1 - P\left(Z \le \frac{100}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1) = 0,1587\,.$$

(b) För att bestämma $\sigma$ så att $P(Y > 22\ 000) = 0,01$ använder vi oss av att

$$P(Y > 22\ 000) \approx P\left(Z > \frac{100}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{100}{\sigma}\right).$$

Vi får

$$
\begin{aligned}
1 - \Phi\left(\frac{100}{\sigma}\right) &= 0.01 \\
\frac{100}{\sigma} &= 2,3263 \\
\sigma &= 43\,.
\end{aligned}
$$

(5) Se lösningar till lektionsuppgifter, 3.14.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(6) (a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Låt $X$ beteckna antalet steg tills första återkomsten och låt $Y_i$ beteckna antalet återstående steg då partikeln befinner sig $k$ sidor från startpunkten, $k = 1, 2$. Betingning ger

$$
\begin{aligned}
E[X] &= 1 + E[Y_1], \\
E[Y_1] &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(1 + E[Y_2]), \\
E[Y_2] &= 1 + E[Y_1],
\end{aligned}
$$

så att

$$E[Y_1] = 3 \quad \text{och} \quad E[X] = 4.$$