LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 15 / TEN 1

18 augusti 2020, klockan 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Alla hjälpmedel är tillåtna.

Betygsgränser 3: minst 8 poäng, 4: minst 11.5 poäng, 5: minst 15 poäng (av 18)

(1) I en låda ligger fyra symmetriska tärningar: två röda, en svart och en vit. De två röda är numrerade 1, 2, 3, 4, 5, 6. Den svarta är numrerad 1, 1, 3, 5, 5, 5 och den vita 2, 2, 4, 6, 6, 6. En tärning tages på måfå ur lådan och kastas.

- (a) Låt $A = \{\text{erhålla en sexa}\}$ och betrakta händelserna $B_1 = \{\text{dra en röd tärning}\}$, $B_2 = \{\text{dra en svart tärning}\}$, $B_3 = \{\text{dra en vit tärning}\}$. Bestäm $P(A|B_i)$, $i = 1, 2, 3$. (1p)
- (b) Vad är sannolikheten att få en sexa? (1p)
- (c) Vad är då sannolikheten att tärningen är röd under förutsättning att vi erhållit en sexa? (1p)

(2) Låt $U_1, \ldots, U_n$ vara oberoende likformigt fördelade slumpvariabler på intervallet $(0, 1)$.

- (a) Beräkna $P(2 \cdot \min(U_1, U_2) > x)$, $x \in (0, 2)$. (1p)
- (b) Beräkna $P(n \cdot \min(U_1, \ldots, U_n) > x)$, $x \in (0, n)$, $n \in \mathbb{N}$. (1p)
- (c) Bestäm $F(x) := \lim_{n\to\infty} P(n \cdot \min(U_1, \ldots, U_n) \le x)$, $x \in \mathbb{R}$. (0.5p)
- (d) Ange fördelning vars fördelningsfunktion är F från (c)-delen. (0.5p)

<u>Ledning:</u> Kom ihåg att för två slumpvariabler X, Y och $z \in \mathbb{R}$ det gäller att

$$\{\min(X, Y) > z\} = \{X > z\} \cap \{Y > z\} .$$

(3) Kalle spelar ett spel där han kan välja själv hur mycket han satsar i varje omgång. Om han vinner får han tillbaka dubbla insatsen. Han vinner med sannolikhet $\frac{1}{2}$ varje omgång oberoende av vad som har hänt i tidigare omgångar.

Kalle har kommit på följande strategi: Han börjar med att satsa 1 kr. För varje omgång han förlorar så dubblar han insatsen till nästa omgång. När han vinner för första gången så slutar han spela.

- (a) Om Kalle har obegränsat med pengar att spela för, vad är väntevärdet för hans nettovinst (vinst minus sammanlagd insats) om han följer sin strategi? *Ledning:* Vad är nettovinsten om han vinner först i omgång nummer n? (1p)
- (b) Om Kalle har begränsat med pengar att spela för, vad är väntevärdet för nettovinsten om han följer sin strategi tills han vinner för första gången eller pengarna tar slut så att han inte kan fortsätta att dubbla insatsen? *Ledning:* Du kan anta att Kalle från början har k kr att spela för och att dessa räcker att spela för i högst N omgångar, dvs $2^N \le k + 1 < 2^{N+1}$ för något N. (2p)

(4) Låt X_1, X_2 vara oberoende $N(0,1)$-fördelade stokastiska variabler. Låt den stokastiska vektorn $\mathbf{Y}$ defineras genom

$$\mathbf{Y} \equiv \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna den simultana täthetsfunktionen, väntevärdesvektorn och kovariansmatrisen för $\mathbf{Y}$. (1.5p)

(b) Bestäm täthetsfunktionen av $Y_1^2 + Y_2^2$. (1.5p)

Ledning: Om Z_1, Z_2 är oberoende $N(0,1)$-fördelade stokastiska variabler så kallas fördelningen av $Z_1^2 + Z_2^2$ $\chi^2(2)$-*fördelning*. Täthetsfunktionen av en $\chi^2(2)$-fördelad slumpvariabel är

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x \geq 0.$$

(5) Kapten Blook har ett skepp som sjunker om det lastas med mer än 15000 kg. Han smugglar stiletter i paket vars vikter är oberoende med väntevärde 13.2 kg och varians 23.2 kg.

(a) Han lastar skeppet med 1000 paket. På skeppet finns också ett litet antal pirater (vars vikter inte räknas in i de 15000 kg), bör de vara oroliga? (1p)

(b) Kapten Blook vill tjäna mer pengar och tänker att det inte är så noga om skeppet sjunker, då han kan stjäla ett annat skepp. Han är villig att öka antalet paket som skeppas och kan acceptera att skeppet sjunker med 5 procent sannolikhet. Ställ upp en ekvation för att hitta det maximala antal paket N så att sannolikheten att skeppet sjunker är mindre än 5 procent. Och ge ett approximativt värde på N. (2p)

Ledning: Använd centrala gränsvärdessatsen.

(6) En Markovkedja har övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Undersök om kedjan är irreducibel och aperiodisk. (1p)

(b) Finns det någon stationär fördelning? Om det är så, bestäm alla stationära fördelningar. (2p)
Ledning: För att slippa numeriska beräkningar, använd

$$(4,\ 1,\ 2,\ 1)\,(\mathbf{P} - \mathbf{I}) = (4,\ 1,\ 2,\ 1) \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

där $\mathbf{0}$ betecknar nollvektorn och $\mathbf{I}$ är den 4×4-enhetsmatrisen.

Lösningar

(1) Då gäller $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ och $B_i \cap B_j = \emptyset$ om $i \neq j$.

(a),(b)

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3)$$

där $P(B_1) = \frac{2}{4}$, $P(A|B_1) = \frac{1}{6}$, $P(B_2) = \frac{1}{4}$, $P(A|B_2) = 0$, och $P(B_3) = \frac{1}{4}$, $P(A|B_3) = \frac{3}{6}$. Vi får

$$P(A) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{24}.$$

(c)

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{2}{5}.$$

(2) (a)

$$\begin{aligned} P(2 \cdot \min(U_1, U_2) > x) &= P\left(\min(U_1, U_2) > \frac{x}{2}\right) \\ &= P\left(U_1 > \frac{x}{2}\right) \cdot P\left(U_2 > \frac{x}{2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2, \quad x \in (0, 2). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(n \cdot \min(U_1, \ldots, U_n) > x) &= P\left(\min(U_1, \ldots, U_n) > \frac{x}{n}\right) \\ &= P\left(U_1 > \frac{x}{n}\right) \cdots P\left(U_n > \frac{x}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in (0, n). \end{aligned}$$

(c) $F(x) := \lim_{n \to \infty} P(n \cdot \min(U_1, \ldots, U_n) \leq x) = 1 - e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(d) $Exp(1)$-fördelning.

(3) (a) Om Kalle vinner i omgång n så har han totalt satsat $1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ kr. Hans senaste insats är då 2^{n-1} så hans bruttovinst blir $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ och därför blir nettovinsten $2^n - (2^n - 1) = 1$ kr. Men detta värde beror ju inte på n, så oavsett när Kalle vinner för första gången så går han totalt 1 kr plus, så hans förväntade vinst av denna strategi är 1 kr.

(b) Vi antar först att Kalle kan vara med i maximalt N omgångar. Om han vinner på någon av dessa N omgångar så går han plus 1 kr enligt (a). Om han inte vinner på någon av dessa N omgångar så går han back det som han har satsat, dvs $2^N - 1$ kr. Sannolikheten att han skall förlora N gånger i sträck är $\left(\frac{1}{2}\right)^N$. Alltså blir hans förväntade nettovinst

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^N}\right) - (1 - 2^N) \cdot \frac{1}{2^N} = 0\,.$$

Men detta värde beror ju inte på N, så oavsett hur mycket pengar Kalle har med sig från början så är det förväntade värdet 0 kr för hans strategi så länge det finns någon begränsning i Kalles kassa.

(4) (a) Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} .$$

Det gäller att $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$. Det medför att

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{C_Y} \quad = \quad \mathbf{AC_X A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Vi får

$$\mathbf{C_Y^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

och

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) = \frac{1}{4\pi} \exp\left\{ -\frac{1}{4} \left(y_1^2 + y_2^2 \right) \right\} .$$

(b) Del (a) innebär att Y_1 och Y_2 är oberoende normalfördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians 2. Det betyder att $\frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2)$ är $\chi^2(2)$-fördelad. Alltså är

$$1 - e^{-\frac{1}{2}x} = \int_0^x f_{\frac{1}{2}(Y_1^2+Y_2^2)}(y)\, dy = P\left(\frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2) \leq x \right) , \quad x \geq 0,$$

som medför att

$$1 - e^{-\frac{1}{4}x} = P\left(Y_1^2 + Y_2^2 \leq x \right) , \quad x \geq 0,$$

och

$$f_{Y_1^2+Y_2^2}(x) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} , \quad x \geq 0.$$

(5) (a) Vi vill alltså ta reda på sannolikheten att båten är lastad med mer än 15000 kg och därmed sjunker. Beteckna vikten i kg av det i:te paketet med X_i. Vi söker då sannolikheten $P(X_1 + ... + X_{1000} > 15000)$. Då det rör sig om en summa av väldigt många paket kan vi använda oss av centrala gränsvärdessatsen. $X_1 + ... + X_{1000}$ är då approximativt normalfördelad med väntevärde $1000 \cdot 13.2$ kg och varians $1000 \cdot 23.2$ kg^2.

$$\begin{aligned} &P(X_1 + ... + X_{1000} > 15000) \\ &\quad = P\left(\frac{X_1 + ... + X_{1000} - 13200}{\sqrt{23200}} > \frac{15000 - 13200}{\sqrt{23200}} \right) \\ &\quad \approx 1 - \Phi\left(\frac{15000 - 13200}{\sqrt{23200}} \right) \\ &\quad = 1 - \Phi(11.82) \approx 0 . \end{aligned}$$

Så sannolikheten att båten sjunker är otroligt låg.

(b) Vi vill ta reda på hur många paket, maximalt, vi kan lasta på båten så att sannolikheten att båten sjunker är mindre än 5 procent. Vi söker alltså ett N så att $P(X_1 + ... + X_N > 15000) < 0.05$ och vi antar att, enligt centrala gränsvärdessatsen, $X_1 + ... + X_N$ är approximativt $N(13.2N, 23.2N)$-fördelad.

$$\begin{aligned} &P(X_1 + ... + X_N > 15000) \\ &\quad = P\left(\frac{X_1 + ... + X_N - 13.2N}{\sqrt{23.2N}} > \frac{15000 - 13.2N}{\sqrt{23.2N}}\right) \\ &\quad \approx 1 - \Phi\left(\frac{15000 - 13.2N}{\sqrt{23.2N}}\right). \end{aligned}$$

Vi vill alltså att

$$\Phi\left(\frac{15000 - 13.2N}{\sqrt{23.2N}}\right) > 0.95\,.$$

Av detta följer att

$$\frac{15000 - 13.2N}{\sqrt{23.2N}} > 1.645$$

där vi använder oss av tabellen. Genom att kvadrera båda lederna och lösa den andragradsekvationen

$$13.2^2 N^2 - 2 \cdot 15000 \cdot 13.2N - 1.645^2 \cdot 23.2N + 15000^2 = 0.$$

finner vi två rötter $N_1 = 1115.892$ och $N_2 = 1156.473$. Insättningen av N_1 och N_2 i ekvation (1) ger att det bara är N_1 som uppfyller denna ekvation, ty

$$\frac{15000 - N_1 \cdot 13.2}{\sqrt{N_1 \cdot 23.2}} = 1.67 > 1.645$$

och

$$\frac{15000 - N_2 \cdot 13.2}{\sqrt{N_2 \cdot 23.2}} = -1.58 < 1.645$$

Så ett approximativt värde på det maximala antal paket N som gör att sannolikheten att skeppet sjunker är mindre än 5 procent är 1116 paket.

(6) (a) Man kan göra vandringen $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$ varför alla tillstånden kommunicerar med varandra, kedjan är irreducibel. Perioden är 1, ty övergången $1 \to 1$ är möjlig.

(b) Irreducibel och aperiodisk kedja med ändligt många tillstånd. Alltså är den ergodisk. Det finns en entydigt bestämd stationär fördelning. Observera att

$$(4,\ 1,\ 2,\ 1)\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \text{ (nollvektor)}$$

(se ledning) är ekvivalent med

$$\begin{aligned} (4,\ 1,\ 2,\ 1) &= (4,\ 1,\ 2,\ 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (4,\ 1,\ 2,\ 1)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den entydiga stationära fördelningen är alltså $(4/8,\ 1/8,\ 2/8,\ 1/8)$.