

Tentamen i statistik


TAMS24/TEN1 2019-09-07

Tillåtna hjälpmedel:

- en miniräknare (ingen dator);
- Formel- och tabellsamling i matematisk statistik (från MAI);
- Formel- och tabellsamling i matematisk statistik, TAMS65;
- TAMS24: Notations and Formulas (av Xiangfeng Yang).
- At the mountains of madness (H.P. Lovecraft).

Betygsgränser (tillräckliga): 8-11 poäng ger betyg 3; 11.5-14.5 ger betyg 4; 15-18 ger betyg 5. Dina lösningar måste vara fullständiga, välmotiverade, noggrant nedskrivna och avslutade med ett tydligt svar. Var försiktig med vad som är stokastiskt eller ej. Antaganden du gör måste vara explicita. Approximationer är tillåtna om rimliga och tydligt motiverade. Uppgifterna är i slumpmässig ordning.

Lösningar dyker upp på hemsidan någon timme efter skrivningens sluttid.

 N gång för länge länge sedan i ett land långt långt borta så hade Rick och Gary stött på problem med sin flamingofarm Exodus. Någon hade lämnat hotfulla lappar runt omkring farmen. Gary föreslog att det var *djurens frihetsarme* (eller kanske den snarlika organisationen *frihetsarmen för djuren*) som ogillade faktumet att flamingor hålls i fångenskap (och kanske också slakten av nämnda flamingor). Rick å andra sidan antog att det var kulden (hängiven till det krälände kaoset) som ofta drev runt i skogsområdet och mumlade om 'great old ones' och onämnbare fador vid galenskapens berg. I vilket fall som helst så blev resultatet att Exodus stängdes en tid och Gary och Rick tog en längre semester. När de till slut vågade sig tillbaka så hade saker förvärrats avsevärt. Den vackra Exodusskylten hade kladdats över med något rödbrunt och frenetiskt skrivet: *Beneath the Columns of Abandoned Gods lies Dormant Hallucinations, where the Conjuraton of the Sepulchral results in The Sleep of Morbid Dreams. In The Dead of Winter, Pestilential Winds causes the Exhumation of the Ancient.* Luften kändes plötsligt instängd och vinden försvann. Långsamt så togs de sista stegen in i området.

1. Eftersom alla flamingor hade lämnats att ta hand om sig själva så hade de lyckats ta sig in i förrådet där allt tillväxthormon lagrades. På grund av någon tillfällighet (eller färger från rymden) så hade flertalet flamingor lyckats få i sig stora mängder hormon och tillväxten hade varit extrem. Ett slumpmässigt stickprov togs från de överlevande flamingorna (tydligt hade tillskottet gjort att aggressionsnivåer hade stigit avsevärt). Gary vill undersöka nuvarande tillstånd. Hjälptill att analysera stickprovet.

7.18 7.69 6.09 7.31 7.09 6.46 6.80 7.10

Antag att stickprovet är bestående av observationer av oberoende variabler från en normalfördelning med okänd varians σ^2 och okänt väntevärde μ_{nu} .

- (a) Hitta ett konfidensintervall (99% konfidensgrad) för väntevärdet μ_{nu} . (1p)
- (b) Gary hittade också sina gamla anteckningar han tagit innan flykten. Där fanns följande stickprov.

2.69 2.90 3.23 3.52 2.65 3.71 3.46 3.05

Antag att dessa två stickprov är oberoende och att de gamla är från en $N(\mu_{da}, \sigma^2)$ -fördelning. Testa hypotesen att den förväntade vikten innan flykten är mindre än halva den nuvarande förväntade vikten. Använd signifikansnivån 5%. (2p)

- (c) Testa antagandet att variansen i de två föregående stickproven är lika på signifikansnivån 5%. Slutsats? (2p)

2. Efter att Gary delat med sig av sina upptäckter så erkände Rick att han hade gjort ett misstag innan flykten. Trinity, en kvinna från New Mexico, hade sålt en större mängd vacker sand till Rick. Sanden var full av grönglimrande glasslika partiklar som skimrande vackert i ljuset. Sanden hade Trinity tagit med sig från öknen utanför Alamogordo. Rick hade hållt ut hundratals kilo kring den lilla damm där alla flamingor brukade ströva runt. Tyvärr visade det sig att sanden innehöll stora mängder plutonium (och besläktade fissionsprodukter). Rick är orolig att radioaktiviteten påverkar alla flamingor, så han tar lite mätningar med sin gamla pålitliga Geigerräknare. Apparaten är kalibrerad för att mäta giga Becquerel (1 Bq betyder 1 sönderfall per sekund). Antag att sönderfallet kan karakteriseras medelst en Poisson process $X(t)$ med intensitet $\lambda > 0$. Antag vidare att Ricks mätning är en observation av en $X = X(1) \sim \text{Po}(\mu)$ -fördelad variabel. När Rick mätte fick han utfallet $x = 8$. Av någon anledning kände Rick att om det förväntade värdet μ inte var högre än 5 så var saker och ting under kontroll (Not great. Not terrible). Låt $H_0 : \mu = 5$ och $H_1 : \mu > 5$.

- (a) Utför ett hypotestest av H_0 mot H_1 vid signifikansnivån 5%. (2p)
- (b) Vad är testets styrka vid $\mu = 10$ (1p)

3. Antag att vi har samma situation som i föregående övning men att vi nu istället mäter under 10 sekunder och erhåller observationen $y = 82$ av den stokastiska variabeln $Y = X(10)$ (vi mäter alltså den stokastiska processen under 10 sekunder; $t = 10$). Hitta ett 90% konfidensintervall för intensiteten λ . (2p)

4. Under deras frånvarande från farmen så hade kultmedlemmar uppenbarligen fått tillgång till området och utfört sina groteska och onämnbare ritualer. Både Gary och Rick tyckte att platsen kändes mycket annorlunda än tidigare; skuggor vinklades på konstiga sätt och från långväga och horribla dimensioner kunde ekon höras: *"Cthulhu fhtagn! Cthulhu fhtagn! Iä! Shub-Niggurath! The Goat with a Thousand Young!"*

Inte bara hade de flesta flamingor växt sig extremt stora, men den radioaktiva sörjan som formats i vattnet verkade ha samverkat med de infernaliska besvärjelserna för att orsaka kraftiga mutationer. Flera flamingor hade börjat att forma tentakelliknande utväxter. När Rick och Gary använde resonansförstärkare för att öka intensiteten på ekot från den andra sidan, så verkade det som att tentaklifieringen berodde både på intensiteten av ekorna och nivån på den radioaktiva strålningen. Det var dock oklart om administrerat tillväxthormon påverkade tentakeltillväxten. För att svara på de uppenbara frågorna så föreslog man följande modell.

$$\text{Modell: } Y = \beta_0 + \beta_1 a + \beta_2 r + \beta_3 h + \epsilon,$$

där $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ och olika mätningar antages vara oberoende. Kvantiteten a är förstärkningskraften och r är den radioaktiva intensiteten (i lämpliga enheter). Tillväxthormonsvariabeln h är en binär variabel där $h = 1$ innebär att man ger tillväxthormon. Variablerna och uppmätt resultat kan beskådas nedan.

y	a	r	h
59.72	10	9	0
10.70	0	9	1
21.95	4	3	0
28.65	4	8	0
48.18	8	8	1
41.42	8	2	1
12.51	2	1	1
32.28	5	6	0
33.03	4	12	1
33.67	6	4	0

Den abstrakta enheten för att beskriva hur tentaklifierad en flamingo blivit kallas för tentaklines. Följande kalkyler har utförts.

i	$\hat{\beta}_i$	$d(\hat{\beta}_i)$	Variansanalys	
			Frihetsgrader	Kvadratsumma
0	0.41	0.82		
1	4.86	0.10	REGR	3
2	1.11	0.08	RES	6
3	0.28	0.56	TOT	9
				2063.96
				4.35
				2068.32

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 931 & -74 & -50 & -284 \\ -74 & 13 & 0 & 19 \\ -50 & 0 & 9 & -4 \\ -284 & 19 & -4 & 428 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

- (a) Hitta ett prediktionsintervall för Y med 90% konfidensgrad då $a = 2$, $r = 5$ och $h = 0$. (2p)
- (b) Testa på signifikansnivån 1% hypotesen att tillsats av tillväxthormon inte har någon effekt. (1p)

5. Effekten på flamingorna verkade vara som värst vid en specifik plats nära vattnet där flamingorna brukar samlas. Att få tag i och flytta en flamingo på denna plats var i det närmaste omöjligt på grund av förvridna perspektiv av icke-euklidisk geometri och skräckinjagande singulariteter som virvlar runt likt malströmmar av böjt ljus. Rick and Gary lyckades fånga 5 flamingor i en låda utan att se dem tydligt. Frågan ställdes nu angående hur många av flamingorna i lådan som var påverkade av tentaklifieringsprocessen. För att undersöka detta så utfördes följande procedur.

Deras vän Susan — som verkade mindre påverkad av allt — stoppade in sin hand i lådan medan hon blundade hårt för att undvika galenskap. Sedan hugger hon tag i en flamingo i lådan och känner efter tentakler. Efter det släpper hon direkt flamingon igen (fortfarande i lådan). Processen upprepas n gånger, varje repetition oberoende av de tidigare. Låt $X_i = 0$ om flamingon i försök i inte var påverkad av tentaklifieringen och låt $X_i = 1$ annars. Låt nu θ vara det totala antalet tentaklifierade flamingor i lådan.

(a) När 7 försök utfördes var utfallet $x = 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0$. Hitta maximum likelihood estimatoren $\hat{\theta}$ av θ i detta fall. (2p)

(b) Välj en av följande frågor (och besvara den) (1p)

i. Visa att $\hat{\theta}$ är väntevärdesriktig.

ii. Visa att $\hat{\theta}$ *inte* är väntevärdesriktig.

iii. Argumentera för varför föregående frågor är svåra att svara på.

6. Eftersom det uppenbarligen är tentakelns dag (day of the tentacle; DoTT) så funderade Rick and Gary om tentakellängden på olika flamingor var oberoende. Rick påpekade att längderna på tentaklerna borde vara normalfördelade och Gary tänkte att man kunde hitta korrelationen mellan olika längder. Genom att studera några teorem så fann de att okorrelerade normalfördelade variabler var oberoende. Mer specifikt hittade de innehållet i följande påstående, tyvärr utan bevis, så hjälp till att reda ut detta!

Låt $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(0, 1)$ vara oberoende och låt $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ vara inverterbar. Vidare, låt $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{R}^n$. Visa att komponenterna i $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \boldsymbol{\mu}$, där $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, är oberoende om och endast om kovariansmatrisen för \mathbf{Y} är en diagonalmatris. (2p)

Ia! Ia! Cthulhu ftagnh!